

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ

МЕХАНИЗМЫ ДЛЯ ОГИБАНИЯ ЭЛЛИПСОВ

В нашей работе ⁽¹⁾ был предложен ряд новых механизмов для огибания конических сечений. Во всех этих механизмах имелась одна подвижная прямая, являвшаяся огибающей неподвижного конического сечения. В настоящей работе указываются новые механизмы, содержащие две подвижные прямые, являющиеся огибающими неподвижного эллипса.

Рассмотрим шестизвенный кулисный механизм (рис. 1), у которого кулисса 3 выполнена в виде жесткого прямого угла, вращающегося около неподвижной оси *C*, совпадающей с одним из фокусов *F*₁ огибаемого эллипса. Звенья 1 и 5 вращаются около оси *A*, совпадающей с центром огибаемого эллипса, и имеют длину, равную половине большой полуоси эллипса.

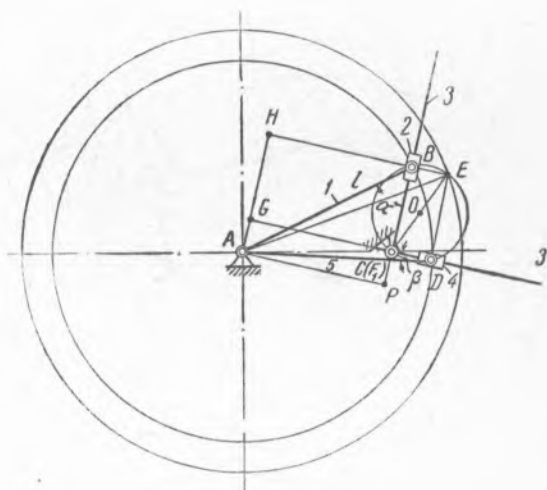


Рис. 1

Восстановим в точках *B* и *D* перпендикуляры. Точку пересечения этих перпендикуляров обозначим через *E*. Нетрудно доказать, что при движении механизма геометрическим местом точек *E* будет всегда окружность, описанная из точки *A* радиусом *l*, равным:

$$l = \sqrt{a^2 + b^2}, \tag{1}$$

где *a* и *b* — половины малой и большой осей огибаемого эллипса.

В самом деле, опустим из точки *A* перпендикуляры *AH* и *AP* на направления *BE* и *BC* и продолжим направление *CD* до пересечения в точке *G* с перпендикуляром *AH*.

Из рис. 1 следует

$$l^2 = (EH)^2 + (AH)^2 \tag{2}$$

и

$$c^2 = (PC)^2 + (AP)^2, \tag{3}$$

где *c* = *AC* есть фокусное расстояние эллипса, как известно, равное

$$c^2 = b^2 - a^2. \tag{4}$$

Нетрудно видеть (рис. 1), что

$$\begin{aligned} EH = DG = b \cos \beta, & \quad PC = b \sin \beta, \\ AH = PB = b \cos \alpha, & \quad AP = b \sin \alpha. \end{aligned} \quad (5)$$

Подставляя величины (5) в уравнения (2) и (3) с учетом условия (4) и складывая их, получим:

$$l^2 = a^2 + b^2, \quad (6)$$

откуда

$$l = \sqrt{a^2 + b^2} = \text{const}, \quad (7)$$

т. е., действительно, точка E описывает окружность постоянного радиуса, равного l .

Прямые EB и ED будут всегда касательными к эллипсу, что следует из известного условия аналитической геометрии (2). В самом деле, соединим точку E с фокусом F_1 (C) и построим на отрезке EC ,

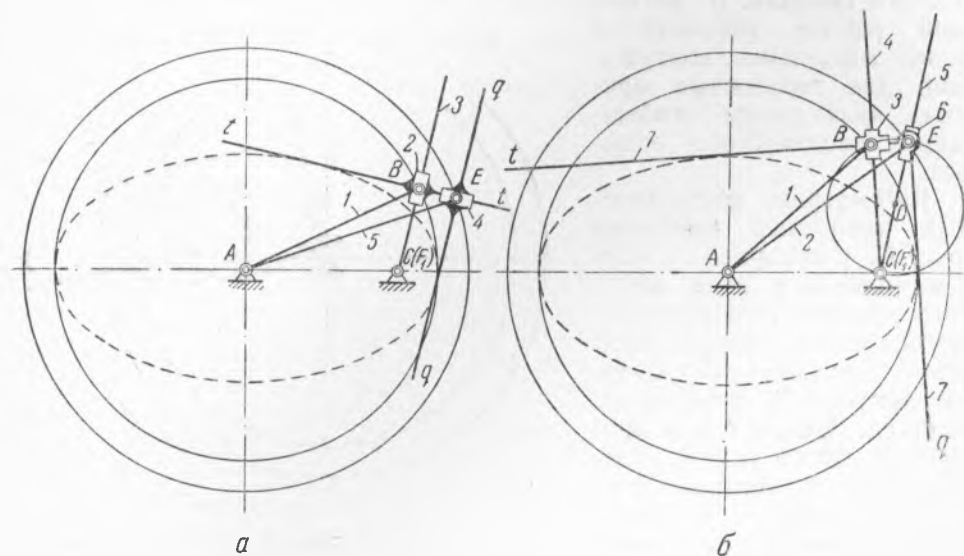


Рис. 2

как на диаметре, окружность с центром в точке O . Так как углы EBC и EDC прямые, то точками пересечения этой окружности с окружностью радиуса, равного b , будут точки B и D . Следовательно, прямые EB и ED будут всегда касательными к эллипсу и образуют между собой прямой угол BED . Если теперь с ползунами 2 и 4 соединить жестко две прямые, перпендикулярные осям движения этих ползунов, то эти прямые будут одновременно обкатывать один и тот же эллипс.

Нетрудно видеть, что полученный механизм представляет собой как бы два спаренных механизма, рассмотренных нами ранее (1), у которых кулисы образуют постоянный жесткий угол, равный 90° . Из кинематики рассмотренного механизма можно получить результат, полученный Г. Л. Полыновским, так как, рассматривая прямые EB и ED как огибаемые, мы получим, что огибающей кривой будет эллипс, и, следовательно, при скольжении эллипса по сторонам прямого угла его центр A будет описывать окружность.

На основе свойства точки E , доказанного выше, может быть предложен шестизвенный механизм, показанный на рис. 2,а. В основе этого механизма лежит кулисный механизм ABC , у которого длина

кривошипа AB равна b , а длина стойки AC равна c . Прямая $t-t$, принадлежащая ползуну 2 и перпендикулярная к оси кулисы 3, будет касательной к эллипсу (1).

К механизму ABC присоединим двухповодковую группу, состоящую из звеньев 4 и 5. При этом длина кривошипа AE должна быть равна $l = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ползун 4 должен скользить вдоль по прямой $t-t$. Тогда прямая $q-q$, принадлежащая ползуну 4 и перпендикулярная к прямой $t-t$, будет также касательной к эллипсу. Таким образом, получаем механизм с двумя прямыми $t-t$ и $q-q$, одновременно касательными к одному и тому же эллипсу.

Если по условиям использования механизма на практике необходимо иметь жесткий прямой угол, огибающий эллипс, то это может быть осуществлено восьмизвенным механизмом, показанным на рис. 2, б.

Здесь два кулисных механизма ABC и AEC соединены одним звеном 7, входящим во вращательную пару в точке E со звеном 6 и в поступательную пару в точке B со звеном 3. Звено 3 выполнено в виде крестообразного ползуна с взаимно перпендикулярными осями движения. Звено 7 представляет собой жесткий прямой угол tEq , с вершиной в точке E , огибающий эллипс. Последнее непосредственно следует из условия, что $AB = b$, $AC = c$, $AE = l = \sqrt{a^2 + b^2}$ и окружность центра O , построенная на AE как на диаметре, всегда пересекает окружность радиуса AB в точке B .

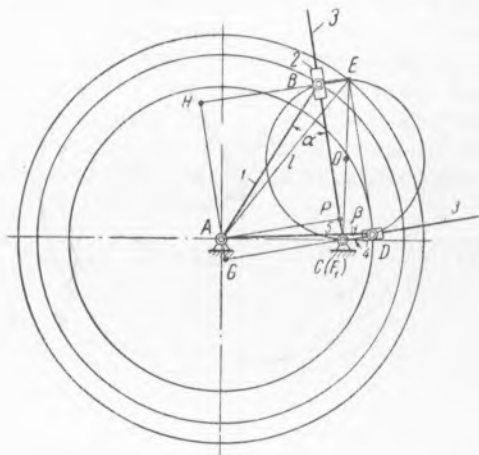


Рис. 3

Рассмотрим далее механизм, который осуществляет одновременное огибание двух софокусных эллипсов. Для этого построим механизм (рис. 3), аналогичный по схеме механизму, показанному на рис. 1, но с размерами, соответственно равными $AD = b_1$, $AB = b_2$ и $AC = c$, где b_1 и b_2 — половины длин больших осей эллипсов, имеющих общее фокусное расстояние c .

Из рис. 3 следует:

$$l^2 = (EH)^2 + (AH)^2, \quad (8)$$

$$c^2 = (PC)^2 + (AP)^2, \quad (9)$$

или, так как

$$\begin{aligned} EH = DG = b_1 \cos \beta, \quad PC = b_1 \sin \beta, \\ AH = PB = b_2 \cos \alpha, \quad AP = b_2 \sin \alpha, \end{aligned} \quad (10)$$

то, следовательно,

$$l^2 = a_2^2 + b_1^2 = a_1^2 + b_2^2, \quad (11)$$

откуда

$$l = \sqrt{a_2^2 + b_1^2} = \sqrt{a_1^2 + b_2^2} = \text{const.} \quad (12)$$

Таким образом, точка E механизма рис. 3 будет всегда описывать окружность постоянного радиуса, равного l . Механизм, осуществляющий огибание двух софокусных эллипсов, показан на рис. 4, а. Он

аналогичен по схеме механизму, показанному на рис. 2, а, но имеет соотношения размеров, удовлетворяющие условиям:

$$AB = b_2 \text{ и } AE = l = \sqrt{a_1^2 + b_2^2} = \sqrt{a_2^2 + b_1^2}. \quad (13)$$

Прямые $t-t$ и $q-q$ будут огибать софокусные эллипсы с полуосями: a_1, b_1 и a_2, b_2 .

Если необходимо иметь огибание двух софокусных эллипсов одним жестким прямым углом, то это может быть сделано механизмом (рис. 4, б), аналогичным по схеме механизму, показанному на рис. 2, б, но с размерами, удовлетворяющими условиям (13).

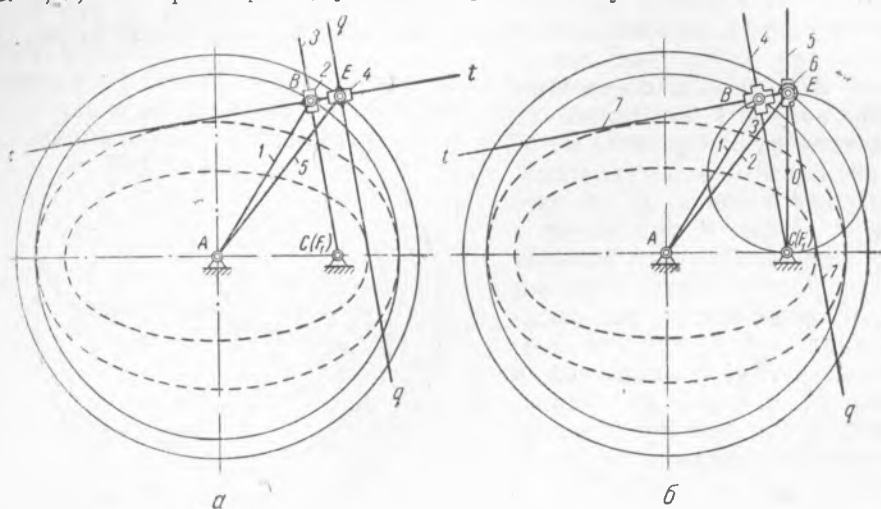


Рис. 4

В заключение отметим, что из аналогичных соображений могут быть получены механизмы для огибания двумя взаимно-перпендикулярными прямыми гипербол и парабол, но эти механизмы не обладают важным в технике свойством проворачиваемости на полный оборот кривошипа и, следовательно, могут обкатывать только участки гипербол и парабол, что значительно снижает возможность их практического использования в технике.

Поступило
25 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Артоболевский, Вестн. инженеров и техников, № 11—12 (1946).
- ² С. С. Бюшгенс, Аналитическая геометрия, ч. 1, 1939.