Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

О НЕКОТОРЫХ НЕОБХОДИМЫХ КРИТЕРИЯХ ИЗГИБАЕМОСТИ ПОВЕРХНОСТЕЙ В МНОГОМЕРНОМ ЕВКЛИДОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 24 I 1949)

В предыдущей статье ([1]) нами была дана геометрическая характеристика поверхностей $V_m \subset E_{m+q}$ малого типа в общем случае и специально в случае $q=2$.

В настоящей работе даются более углубленные необходимые критерии изгибаемости поверхностей.

Как было показано ранее, для того, чтобы $V_m \subset E_{m+2}$ допускала нетривиальное изгибание, необходимо, чтобы выполнялась альтернатива:

1) $r(V_m) \leqslant 5$;

2) $V_m \subset V_{m+1}$, $r(V_{m+1}) \leqslant 2$.

Этот критерий допускает дальнейшее усиление. Предварительно введем несколько новых понятий.

Изометрическое соответствие. $V_m \backsim \overline{V}_m$ будем называть соизгибанием, если: 1) $V_m \subset V_{m+1}$, $\overline{V}_m \subset \overline{V}_{m+1}$, 2) $\overline{V}_{m+1} \backsim V_{m+1}$;

3) поверхности V_m, $\overline{V}_m$ соответствуют друг другу при изометрическом соответствии $V_{m+1} \backsim \overline{V}_{m+1}$.

Изгибание, не являющееся соизгибанием, будем называть собственным.

Ранг изгибания. Будем называть рангом изгибания $V_m \backsim \overline{V}_m$ совместный ранг форм $\{\psi^s_\alpha, \varphi^\varkappa_\beta\}$, где $\{\psi^s_\alpha\}$ — система смешанных форм V_m, $\{\varphi^s_\beta\}$ — система смешанных форм $\overline{V}_m$, $s=1, \ldots, q$; $\alpha, \beta = 1, \ldots, m$.

Можно сформулировать следующую теорему, являющуюся усилением предыдущего результата.

Теорема 1. *Изгибание* $V_m \backsim \overline{V}_m$, $V_m \subset E_{m+2}$, $\overline{V}_m \subset E_{m+2}$, *может быть только двух родов:*

1) $V_m \backsim \overline{V}_m$ *есть соизгибание,*

2) *ранг изгибания* $V_m \backsim \overline{V}_m \leqslant 4$.

Отсюда, в частности, вытекает:

Для того чтобы поверхность V_m *допускала собственное изгибание, необходимо, чтобы* $r(V_m) \leqslant 4$.

Теорема 1 может принять несколько иной вид, если ввести понятие элементов конгруентности.

Пусть $V_{m-\rho}$ есть некоторая поверхность, лежащая на V_m, $\overline{V}_{m-\rho}$ — соответствующая ей по изометрии поверхность на $\overline{V}_m$. Будем называть $V_{m-\rho}$ **элементом конгруентности**, если вдоль $V_{m-\rho}$ изометрия $V_{m-\rho} \propto \overline{V}_{m-\rho}$ вырождается в конгруентность $V_{m-\rho} \equiv \overline{V}_{m-\rho}$.

Тогда теорема 1 утверждает, что:

1. *Изгибающаяся поверхность* V_m *допускает расслоение на* ρ*-мерное семейство элементов конгруентности* $V_{m-\rho}$:

$$V_m = \infty^\rho V_{m-\rho}, \quad \overline{V}_m = \infty^\rho \overline{V}_{m-\rho}, \quad \overline{V}_{m-\rho} \equiv V_{m-\rho},$$

причем $\rho \leqslant 4$.

2. *Если* V_m *допускает соизгибание, то элементы конгруентности суть поверхности класса* 1 *и размерности* $\geqslant m-2$

$$V_m = \infty^2 V_{m-2}, \quad \overline{V}_m = \infty^2 \overline{V}_{m-2}, \quad V_{m-2} = \overline{V}_{m-2}.$$

3. *Если* V_m *допускает собственное изгибание, то элементы конгруентности суть поверхности класса* 0 (*плоскости*) *и размерности* $\geqslant m-4$

$$V_m = \infty^4 E_{m-4}, \quad \overline{V}_m = \infty^4 \overline{E}_{m-4}, \quad E_{m-4} \equiv \overline{E}_{m-4}.$$

Необходимое условие $r(V_m) \leqslant 4$ собственного изгибания можно усилить.

Предварительно введем еще понятия фокального элемента и фокального семейства плоскостей.

Рассмотрим поверхность V_m, которая допускает расслоение на ∞^r плоскостей E_{m-r}, причем вдоль E_{m-r} нормальный бивектор $\{\xi_1, \xi_2\}$ остается постоянным (т. е. $r(V_m) \leqslant r$).

Легко видно, что поворотом репера $J_1 \ldots J_m$ можем добиться:

$$\omega_\alpha^{m+s} = \psi_\alpha^s = 0, \quad \alpha = r+1, \ldots, m, \quad s = 1, 2;$$

$$\left.\begin{aligned} \omega_i^{m+s} &= \lambda_{ij}^s \omega^i, \ \lambda_{ij}^s = \lambda_{ji}^s, \quad i, j = 1, \ldots, r; \\ \omega_\alpha^i &= a_{\alpha j}^i \omega^j, \quad i, j = 1, \ldots, r, \quad \alpha = r+1, \ldots, m \end{aligned}\right\} \text{суммирование по } j.$$

При этом $\{J_1 \ldots J_r\} = E_r \perp E_{m-r}$.

Назовем направление $d\overline{r}$, входящее в E_r, **фокальным**, если при сдвиге E_{m-r} вдоль этого направления переходим к бесконечно близкой плоскости $\overline{E}_{m-r}$, причем

$$E_{m-r} \cap \overline{E}_{m-r} = E_{m-r-1},$$

т. е. при сдвиге в фокальном направлении E_{m-r} пересекает максимально тесно соответствующую бесконечно близкую плоскость $\overline{E}_{m-r}$.

Необходимым и достаточным условием того, чтобы $d\overline{r}$ было фокальным направлением, является

$$\frac{\omega_\alpha^i}{\omega^i} = u_\alpha, \quad i = 1, \ldots, r, \quad \alpha = r+1, \ldots, m$$

для ω^i, соответствующих dr: $dr = \omega^i J_i$, $i = 1, \ldots, r$. Иными словами, аффиноры $a^i_{\alpha j}$ имеют одно и то же инвариантное направление.

Фокальным семейством плоскостей E_{m-r} будем называть однопараметрическое семейство плоскостей $E_{m-r}(t)$, удовлетворяющее требованию $E_{m-r}(t) \cap E_{m-r}(t+dt) = E_{m-r-1}(t)$.

Теперь можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 2. *Для того чтобы V_m допускала собственное изгибание, необходимо, чтобы:*

1) *V_m допускало расслоение на r-параметрическое семейство плоскостей E_{m-r}, вдоль каждой из которых нормальная плоскость остается постоянной* (*т. е.* $\operatorname{rang}(V_m) \leqslant r$);

2) *в каждой точке $P \in V_m$ имеется, по крайней мере, одно фокальное направление $d\bar r \in E_r \perp E_{m-r}$, $r \leqslant 4$.*

Пункт 2) может быть сформулирован несколько иначе.

V_m расслаивается на ∞^{m-1} фокальных семейств плоскостей E_{m-r}, $r \leqslant 4$.

Более детальное исследование показывает, что каждому типу аффинора $a^i_{\alpha j}$ отвечает определенная структура поверхности и изгибания.

Не давая всей классификации, укажем только два крайних частных случая.

1. Любое направление $d\bar r \subset E_4 = \{J_1 \ldots J_4\}$ является фокальным. Тогда V_m имеет цилиндрическое строение, а именно: V_m представляет собой цилиндр, основание которого есть поверхность $V_5 \subset E_7$, причем V_m получается, если через каждую точку V_5 провести плоскость $E_{m-5} \perp E_7$. Изгибание V_m сводится к изгибанию его основания V_5 в E_7^0, т. е. образующие E_{m-5} движутся поступательно, оставаясь перпендикулярными к фиксированной плоскости.

2. Другой, наиболее интересный случай получается, наоборот, когда аффиноры $a^i_{\alpha j}$ имеют минимально вырожденное строение, т. е. имеются только 4 фокальных линейно независимых направления $i_1, \ldots, i_4$, которые составляют фокальный репер.

Если перейти к реперу $i_1 \ldots i_4\ J_5 \ldots J_m$, то получим $(\omega^i)' = 0 \pmod{\omega^i}$, $i = 1, 2, 3, 4$. Это означает, что репер $i_1 \ldots i_4$ является голономным, т. е. можно так параметризовать плоскости $E_{m-4}(u^1, u^2, u^3, u^4)$, что координатные семейства $E_{m-4}(u_0^1, u_0^2, u_0^3, u^4), \ldots, E_{m-4}(u^1, u_0^2, u_0^3, u_0^4)$, являются фокальными.

Обозначим через π_s, $s = 1, 2$, левые части нормированных уравнений касательных гиперплоскостей:

$$\xi_s(\bar r - \bar r_0) = 0 \qquad (\xi_s^2 = 1, \quad \xi_1 \cdot \xi_2 = 0), \qquad s = 1, 2,$$

где $\xi_s = J_{m+s}$ — нормаль к поверхности, $s = 1, 2$; $\pi_s = \xi_s(r - r_0)$; $\bar r$ — произвольная точка пространства E_{m+2}; $\bar r_0$ — точка поверхности V_m.

Тогда легко видеть, что π_s суть функции координат $u^1, \ldots, u^4$, от которых зависят ξ_1 и $\bar r_0$, удовлетворяющие дифференциальным уравнениям

$$\frac{\partial^2 \pi_s}{\partial u^i \partial u^j} = \lambda_{sij}^{\cdot\cdot\cdot k} \frac{\partial \bar u_s}{\partial u^k} + \mu_{sij}^{\cdot\cdot\cdot t} \pi_t, \quad s, t = 1, 2, \quad i, j, k = 1, \ldots, 4, \qquad (*)$$

причем $\lambda_{sij}^{\cdot\cdot\cdot k}$, $\mu_{sij}^{\cdot\cdot\cdot t}$ суть функции от $u^1, \ldots, u^4$.

Обратно, если поверхность V_m ранга 4 имеет касательные гиперплоскости $\pi_1 = 0$, $\pi_2 = 0$, удовлетворяющие уравнениям типа $(*)$, то V_m имеет невырожденный фокальный репер.

В частном случае, когда $a^i_{\alpha j}$ есть симметричный аффинор (в ортогональном репере $J_1 J_2 J_3 J_4$), поверхность с невырожденным фокальным репером есть поверхность с линиями кривизны, т. е. можно выбрать такую систему координат $u^1, \ldots, u^4, u^5, \ldots, u^m$, что:

1) $dr = du^i J_i + du^\alpha J_\alpha, \quad i = 1, \ldots, 4, \quad \alpha = 5, \ldots, m;$

2) $\frac{\partial \xi_s}{\partial u^k} = a_{sk} J_k, \quad s = 1, 2, \quad k = 1, \ldots, 4,$ по k не суммируется;

3) $\frac{\partial \xi_s}{\partial u^\alpha} = 0, \quad s = 1, 2, \quad \alpha = 5, \ldots, m.$

Последние уравнения 2, 3 суть аналоги уравнений Родрига.

Примечание. В цитируемой работе [1] формулируемые мною теоремы верны не только для малого типа t ($= 0, 1, 2$), но и для произвольного $r > 2$.

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
15 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Яненко, ДАН, 64, № 5 (1949).