Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Н. Г. ЧУДАКОВ

О НЕКОТОРЫХ СТЕПЕННЫХ РЯДАХ, СОДЕРЖАЩИХ ПРОСТЫЕ ЧИСЛА В ПОКАЗАТЕЛЯХ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 4 II 1949)

В этой заметке я излагаю некоторые обобщения моих прежних исследований о степенных рядах специального вида [1]. Приложения полученных результатов к теории L-функций и к аддитивным проблемам теории чисел будут даны позже.

Обозначения. Пусть $r<1$; $M=(1-r)^{-1}$; $x=r\exp i\varphi$; q — натуральное число $\geqslant 1$; a — целое, причем $(a, q)=1$; $\rho=\exp 2\pi i\frac{a}{q}$; $\theta=\varphi-2\pi\frac{a}{q}$; A — произвольное фиксированное положительное число; k — натуральное число $\geqslant 2$; $h=\varphi(k)$; $A_1=2^{6k}(A+1)$; $A_2=Ak+A_1$; $A_3=A_2+A$; $\tau=M(\lg M)^{-A_2}$; $\tau_1=(\lg M)^{A_3}$; $H=2\pi(\lg M)^{A_1}$; $f(x)=\sum\limits_{p>2}\lg p\cdot x^{p^k}$; $\psi_\rho(x)=h^{-1}\Gamma\left(\frac{1}{k}\right)(1-x\rho^{-1})^{-\frac{1}{k}}\sum\limits_{(a,\,q)=1}\rho^{a^k}$, где p пробегает все простые числа.

Символы „O“ и „$\ll$“ заменяют собой величины, зависящие только от A и k; $c_1, c_2, \ldots$ — абсолютные положительные постоянные.

Теорема. *В области, где* $|\theta|\leqslant\pi(q\tau_1)^{-1}$, $q\leqslant\tau_1$, *справедлива оценка*:

$$f(x)-\psi_\rho(x)\ll M^{\frac{1}{k}}(\lg M)^{1+\frac{1}{k}-A}. \qquad (1)$$

Доказательство. Пусть сначала $|\theta|\leqslant HM^{-1}$. Прежде всего заметим, что

$$f(x)-\sum_{n=2}^{\infty}\chi_0(n)\Lambda(n)x^n\ll M^{\frac{1}{2k}}(\lg M)^{1+\frac{1}{2k}}+\lg q, \qquad (2)$$

что доказывается аналогично лемме 7 моей работы [1]; $\chi_0(n)$ — главный характер $\bmod q$.

Применяя оператор Mellin'a к вычитаемому левой части (2), получаем:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\chi_0(n)\Lambda(n)x^n=i(2\pi h)^{-1}\sum_{\chi}\sigma(\chi,\rho)\int_{(2)}\xi^{-s}\Gamma(s)\frac{L'}{L}(ks,\chi)\,ds, \qquad (3)$$

где $\sigma(\chi,\rho)=\sum\limits_{m=0}^{q-1}\chi(m)\rho^{m^k}$ — ξ — главная ветвь $\lg x\rho^{-1}$.

Каждый интеграл правой части (3) мы можем заменить интегралом вдоль кривой (L), уравнение которой можно записать в таком виде:

$$s = k^{-1} - \varepsilon(q)\, k^{-1} \omega(kt) + it,$$

где $\omega(t)$ имеет тот же смысл, как и в ([1]), стр. 536; $\varepsilon(q) = 1$ или $\frac{1}{3}$.

Поэтому, рассуждая так же как и в ([1]), мы получаем:

$$\int\limits_{(2)} \xi^{-s}\,\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(ks, \chi)\,ds =$$

$$= \int\limits_{(L)} \xi^{-s}\,\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(ks,\chi)\,ds - 2\pi i E(\chi)\,\xi^{-\frac{1}{k}}\,\Gamma\left(\frac{1}{k}\right) + 2\pi i \tilde{E}(\chi)\,\xi^{-\frac{\tilde{\beta}}{k}}\,\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta}}{k}\right) k^{-1} \tag{4}$$

(смысл символов $E(\chi)$ и $\tilde{E}(\chi)$ см. ([1])).

Известная теорема Siegel'я (см., например, теорема 49 в ([2])) тотчас же дает нам оценку:

$$\tilde{E}(\chi)\,\xi^{-\frac{\tilde{\beta}}{k}}\,\Gamma\left(\frac{\tilde{\beta}}{k}\right) k^{-1} \ll M^{\frac{1}{k}} \exp\left(-c_1 (\lg M)^{\frac{1}{2}}\right).$$

Далее, легко видеть, что

$$\int\limits_{(L)} \xi^{-s}\,\Gamma(s)\,\frac{L'}{L}(ks, \chi)\,ds \leqslant \int\limits_0^\infty \Phi(t, q)\,dt,$$

где

$$\Phi(t, q) = \lg^2 q\,(kt + 3) \exp\left[k^{-1}\left(1 - \frac{1}{3}\omega(kt)\right) \lg M - \frac{1}{2}\, tH^{-1}\right].$$

Но

$$\int\limits_0^{H^2} \Phi(t, q)\,dt \ll \exp - c_2\,\frac{\lg M}{\lg\lg M};$$

далее,

$$\int\limits_{H^2} \Phi(t, q)\,dt \ll M^{\frac{1}{k}} \int\limits_{H^2}^\infty e^{-\frac{1}{2}tH^{-1}} \lg^2 t\,dt \ll M^{\frac{1}{k}} \lg\lg M \exp - \frac{1}{4} H.$$

Наконец, нетрудно видеть, что

$$\xi^{-\frac{1}{k}} - (1 - x\rho^{-1})^{-\frac{1}{k}} \ll 1 \text{ для } \xi \neq 0 \text{ и } |\xi| < \pi.$$

Следовательно, соединяя все полученные до сих пор оценки и принимая во внимание соотношения (2) — (4), мы находим, что в рассматриваемой области изменения θ справедлива оценка:

$$f(x) - \psi_\rho(x) \ll h^{-1} \sum_\chi |\sigma(\chi, \rho)|\, M^{\frac{1}{k}} \exp - c_3 (\lg M)^{\frac{1}{2}} \ll \max|\rho(\chi, \rho)|.$$

$$M^{\frac{1}{k}} \exp - c_3 (\lg M)^{\frac{1}{2}} \ll M^{\frac{1}{k}} \exp - c_4 (\lg M)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

ибо $|\sigma(\chi, \rho)| \leqslant h \leqslant q \leqslant (\lg M)^{A_2}$.

Пусть теперь $|\theta| > M^{-1} H$. В этой области мы применим известные оценки тригонометрических сумм, принадлежащие И. М. Виноградову

градову ([3]) (ср. также ([4])). Теорему И. М. Виноградова можно, между прочим, формулировать так:

Пусть

$$(a', q') = 1, \qquad (\lg N)^{A_1} < q' \leqslant N^k (\lg N)^{-A_2},$$

где N — любое положительное число, k — натуральное $\geqslant 2$, A_1 и A_2 имеют те значения, которые были указаны выше. Тогда

$$C(N) = \max_{1 \leqslant x \leqslant N} \left| \sum_{2 \leqslant p \leqslant x} \exp 2\pi i \frac{a'}{q'} p^k \right| \ll N (\lg N)^{-A}, \tag{6}$$

где p пробегает простые числа интервала $[2, x]$.

Легко далее видеть, что

$$f(x) - S(N, \theta) + O(\lg M), \tag{7}$$

где

$$N = \left[\left(2 \lg M \left(\lg \frac{1}{r} \right)^{-1} \right)^{\frac{1}{k}} \right], \qquad S(N, \theta) = \sum_{2 \leqslant p \leqslant N} \lg p \cdot x^{p^k}.$$

Выберем теперь среди дробей Фарея $\frac{a'}{q'}$ для $q' \leqslant \tau$ ту, для которой справедливо неравенство:

$$\left| \frac{\varphi}{2\pi} - \frac{a'}{q'} \right| \leqslant \frac{1}{\tau q};$$

простая проверка убеждает нас в том, что $\frac{a'}{q'} \neq \frac{a}{q}$.

А в таком случае неравенство $|\theta| \leqslant \pi (q\tau_1)^{-1}$ влечет за собой неравенство $q' \geqslant \tau_1$. Легко теперь проверить, что q' удовлетворяет всем требованиям, при соблюдении которых справедливо неравенство (6).

Следовательно:

$$C(N) \ll N (\lg N)^{-A} \ll M^{\frac{1}{k}} (\lg M)^{\frac{1}{k} - A}$$

и

$$S(N, 0) \ll C(N) \max_{1 \leqslant x < \infty} \lg x \exp x^k \lg r \ll M^{\frac{1}{k}} (\lg M)^{1 + \frac{1}{k} - A}. \tag{8}$$

Но

$$S(N, \theta) - S(N, 0) \ll \sum_{2 \leqslant p \leqslant N} r^{p^k} \lg p \left| \exp p^k \varphi i - \exp 2\pi \frac{a'}{q'} p^k i \right| \ll$$

$$\ll N |\theta| N^k \ll NM (\lg M) (\tau q')^{-1} \ll M^{\frac{1}{k}} (\lg M)^{1 + \frac{1}{k} - A}, \tag{9}$$

ибо $\tau q' \geqslant M (\lg M)^{-A}$.

Сопоставляя неравенства (6) — (9), мы легко заключаем, что для рассматриваемых значений θ справедливо неравенство:

$$f(x) \ll M^{\frac{1}{k}} (\lg M)^{1 + \frac{1}{k} - A}.$$

С другой стороны,

$$\psi_\rho(x) \ll |1 - x\rho^{-1}|^{-\frac{1}{k}} \ll |\theta|^{-\frac{1}{k}} \ll M^{\frac{1}{k}} H^{-\frac{1}{k}} \ll M^{\frac{1}{k}} (\lg M)^{-A}.$$

Неравенство (5) и две последние оценки доказывают нашу теорему.

Доказанная нами теорема влечет за собой известную теорему Варинга — Гольдбаха (ср. (3) и (4)) о представлении целого числа как суммы ограниченного числа слагаемых вида p^k.

Для доказательства этой последней теоремы нужно прежде всего подобрать такое большое $s = s(k)$, что ряд

$$\Phi(x) = \sum_{\rho} \psi_{\rho}{}^{s}(x),$$

где ρ пробегает все точки окружности $|x| = 1$, амплитуды которых соизмеримы с длиной окружности, сходился бы абсолютно внутри единичной окружности; это можно сделать, опираясь на оценки тригонометрических сумм $\sigma(\chi_0, \rho)$. Тогда элемент функции $\Phi(x)$ в точке $x = 0$ с большой степенью точности апроксимирует число представлений целого n как суммы s степеней вида p^k, что влечет за собой теорему Варинга — Гольдбаха.

Другие приложения нашей теоремы будут даны позже.

Поступило
2 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Г. Чудаков, Ann. of Math., 48, 3, 515 (1947). [2] Н. Г. Чудаков, Введение в теорию L-функций Дирихле, 1947. [3] И. М. Виноградов, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, 3 (1937). [4] Хуа-Ло-кен, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, 22 (1947).