Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О НЕКОТОРЫХ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛАХ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 3 II 1949)

I. Рассмотрим квадратурную формулу

$$\int_a^b f(x)\, d\sigma(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^{(n)} f(y_i^{(n)}), \qquad (1)$$

в которой все абсциссы вещественны, различны и лежат на конечном отрезке $[a, b]$, а все коэффициенты неотрицательны, причем $\sigma(x)$ — некоторая функция распределения *, имеющая бесчисленное множество точек роста; через M_n обозначим степень точности формулы (1), т. е. наивысшую степень полинома, для которого она справедлива.

В своем классическом исследовании ([1]) акад. С. Н. Бернштейн рассмотрел квадратурную формулу Чебышева с равными коэффициентами, причем

$$d\sigma(x) = dx, \quad [a, b] = [0, 1]; \quad \lambda_i^{(n)} = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad (2)$$

пользуясь весьма изящными и тонкими методами, он получил неравенство $M_n < 4\sqrt{n}$; при этом оказалось, что решающую роль играет поведение полиномов Лежандра вблизи концов отрезка. Пользуясь аналогичными соображениями при рассмотрении более общего обложения $d\sigma(x)$, мы получим при некоторых ограничениях соотношение $M_n = o\left(\frac{1}{\lambda_1^{(n)}}\right)$, откуда будет следовать, что при $\lambda_1^{(n)} = O\left(\frac{1}{n}\right)$ имеем $M_n = o(n)$.

II. Рассмотрим полиномы $\{P_n(x)\}$, ортогональные относительно обложения $d\sigma(x)$:

$$P_n(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - x_i^{(n)}), \quad a < x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} < b; \qquad (3)$$

введем ступенчатую функцию распределения $\psi_n(x)$, имеющую в каждой точке $\{x_i^{(n)}\}_1^n$ положительный скачок, равный $\frac{1}{n}$; если вся последовательность функций распределения $\{\psi_n(x)\}$ сходится к некоторой функции $\psi(x)$, то мы будем называть эту последнюю предельной функцией распределения нулей ортогональных полиномов $\{P_n(x)\}$**.

* Т. е. функция $\sigma(x)$ ограничена, не убывает, непрерывна слева, причем $\sigma(x) = 0$ при $x < a$ и $\sigma(x) = \sigma(b+0)$ при $x > b$.

** По теореме Хелли можно утверждать лишь, что существует сходящаяся подпоследовательность $\{\psi_{n_\nu}(x)\}$.

Будем говорить, что функция $\sigma(x)$ принадлежит классу A, если выполняются следующие два условия:

1) множество E ее точек роста расположено на замкнутом множестве положительной емкости $E_0 \subset [a, b]$;

2) предельная функция $\psi(x)$ является функцией распределения Робена $\mu(x)$ множества E_0, т. е.

$$\int_{E_0} \lg \frac{1}{|z-x|}\, d\mu(x) = \text{const}, \quad z \in E_0; \quad \int_{E_0} d\mu(x) = 1. \tag{4}$$

Лемма. *Если предельная функция $\psi(x)$ является функцией распределения Робена $\mu(x)$ и если $e = [a, a+\varepsilon] \subset E_0$, где ε — малая положительная константа, то*

$$\mu(x) = O(\sqrt{x-a}), \quad x \in e. \tag{5}$$

Для доказательства рассмотрим функции

$$\begin{gathered} \gamma(z) = \int_{E_0} \frac{d\mu(x)}{z-x}, \qquad \operatorname{Im}\gamma(z) \leqslant 0, \qquad \operatorname{Im} z \geqslant 0; \\ F(z) = \int \gamma(z)\, dz = \int_{E_0} \lg(z-x)\, d\mu(x); \end{gathered} \tag{6}$$

для вещественных значений $z < a$ функция $F(z)$ вещественна и убывает с возрастанием z; если мы обойдем точку $z = a$ по полуокружности малого радиуса, лежащей в верхней полуплоскости, то на отрезке e будем иметь

$$\operatorname{Re} F(z) = \int_{E_0} \lg|z-x|\, d\mu(x) = \text{const}, \qquad \operatorname{Im} F(z) < 0, \qquad z \in e; \tag{7}$$

исследуя особенность функции $F(z)$ в точке $z = a$, мы видим, что в достаточно малой окрестности этой точки имеем

$$F(z) - F(a) = -i\sqrt{z-a} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k (z-a)^k, \qquad \alpha_0 \neq 0, \tag{8}$$

где все коэффициенты вещественны; пользуясь формулой обращения Стильтьеса — Перрона, имеем для $x \in e$

$$\frac{\mu(x+0) + \mu(x-0)}{2} = -\frac{1}{\pi} \lim_{\eta \to +0} \operatorname{Im} F(x + i\eta) = O(\sqrt{x-a}), \qquad x \in e. \tag{9}$$

Теорема 1. *Пусть $\sigma(x) \in A$ и пусть функция $\sigma(x)$ непрерывна на e, а функция $\sigma'(x)$ почти всюду на e положительна; тогда, если*

$$\lim_{x \to a} \frac{\sigma(x)}{\sqrt{x-a}} = 0, \tag{10}$$

то *

$$\lim_{n \to \infty} \{M_n \lambda_1^{(n)}\} = 0. \tag{11}$$

Для доказательства положим $2m - 1 \leqslant M_n$ и рассмотрим квадратурную формулу Гаусса — Кристоффеля

* Аналогичные условия вблизи правого конца.

$$\int\limits_E f(x)\,d\sigma(x) = \sum_{\nu=1}^{m} \rho_\nu^{(m)} f(x_\nu^{(m)}), \tag{12}$$

верную для всех полиномов степени не выше $2m-1$.

Воспроизводя рассуждения С. Н. Бернштейна*, мы имеем при $n > m$

$${}_1^{(n)} < x_1^{(m)}; \qquad \lambda_1^{(n)} \leqslant \rho_1^{(m)}; \tag{13}$$

введем ступенчатую функцию распределения $\sigma_m(x)$ со скачками

$$\sigma_m(x_\nu^{(m)}+0) - \sigma_m(x_\nu^{(m)}-0) = \rho_\nu^{(m)} \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, m); \tag{14}$$

в таком случае, полагая $x_1^{(m)} < \eta < x_2^{(m)}$, имеем

$$m\rho_1^{(m)} = \frac{\sigma_m(\eta)}{\psi_m(\eta)}. \tag{15}$$

Благодаря условиям теоремы имеем при фиксированном η

$$\lim_{m\to\infty} \psi_m(\eta) = \psi(\eta) = \mu(\eta); \qquad \lim_{m\to\infty} \sigma_m(\eta) = \sigma(\eta), \tag{16}$$

причем, благодаря непрерывности функций $\sigma(x)$ и $\mu(x)$ на отрезке e, сходимость равномерная ([3]); следовательно, выбирая число m настолько большим, чтобы $\eta \in e$ (что всегда можно сделать, ибо $\sigma'(x) > 0$ почти всюду на e) будем иметь

$$m\lambda_1^{(n)} \leqslant m\rho_1^{(m)} = \frac{\sigma(\eta)}{\mu(\eta)} + \varepsilon_m, \tag{17}$$

где $\lim\limits_{m\to\infty} \varepsilon_m = 0$ равномерно на e.

Пользуясь леммой и условием (10), находим (11).

Примечание 1. Если функция $\sigma(x)$ дифференцируема на отрезке e, то вместо (10) имеем условие

$$\lim_{x\to a} \{\sigma'(x)\sqrt{x-a}\} = 0. \tag{18}$$

III. Условия, необходимые и достаточные для того, чтобы предельная функция $\psi(x)$ существовала и являлась функцией $\mu(x)$ Робена, приведены в наших заметках ([2], [4]); так как они довольно сложны, то укажем весьма простое достаточное условие для одного частного случая.

Теорема 2. *Пусть E_0 состоит из конечного числа конечных отрезков*

$$E_0 = [a_1, b_1] + [a_2, b_2] + \ldots + [a_s, b_s], \tag{19}$$

причем пусть $E = E_1 + E_2$, где $E_1 \subset E_0$; $E_2 \subset [a_1, b_s]$ не более, чем счетное множество, и $E_2' \subset E_0$; тогда, если $\sigma'(x) > 0$ почти всюду на E_0, то $\sigma(x) \in A$.

Для доказательства достаточно сопоставить результаты наших заметок ([2]) и ([4]).

В этом частном случае мы можем указать явный вид функции Робена $\mu(x)$ для множества E_0; она абсолютно непрерывна, причем

$$\mu'(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\,|\varphi(x)|, & x \in E_0, \\ 0, & x \overline{\in} E_0, \end{cases} \tag{20}$$

* Или пользуясь неравенствами Чебышева — Маркова.

где *

$$\varphi(z) = \frac{\prod_{k=1}^{s-1}(z - c_k)}{\sqrt{\prod_{i=1}^{s}(z - a_i)(z - b_i)}}; \tag{21}$$

при этом числа $\{c_k\}_1^{s-1}$ однозначно определяются из условий

$$\int_{b_\nu}^{a_{\nu+1}} \varphi(x)\,dx = 0, \quad b_\nu < c_\nu < a_{\nu+1} \quad (\nu = 1, 2, \ldots, s-1). \tag{22}$$

Примечание 2. Пользуясь функцией Робена $\mu(x)$, мы можем без труда найти асимптотическую формулу для любого числа Кристоффеля $\rho_\nu^{(m)}$, подобно тому как мы это сделали для $\rho_1^{(m)}$; предположим, что функция $\sigma(x)$ дифференцируема всюду на E_0 и что функция $\frac{\sigma'(x)}{\mu'(x)}$ положительна и непрерывна на E_0; в таком случае имеем

$$\rho_\nu^{(m)} \sim \frac{1}{m} \frac{\sigma'(x_\nu^{(m)})}{\mu'(x_\nu^{(m)})}, \quad x_\nu^{(m)} \in E_0. \tag{23}$$

Поступило
3 II 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 14, № 6 (1937). [2] Я. Л. Геронимус, Матем. сб., 23, № 1, 77 (1948). [3] G. Polya, Math. Z., 8, 171 (1920). [4] Я. Л. Геронимус, ДАН, 39, № 8 (1943).

* В частности, для отрезка $[-1, +1]$ имеем $\mu'(x) = \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$, $\mu(x) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos x$.