Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. И. ВИШИК

ЛИНЕЙНЫЕ РАСШИРЕНИЯ ОПЕРАТОРОВ И КРАЕВЫЕ УСЛОВИЯ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 8 II 1949)

Вопрос о нахождении всех однородных, линейных и корректных (в некотором смысле) краевых условий для данного дифференциального уравнения тесно связан с вопросом о нахождении всех корректных (в некотором смысле) линейных операторов, заключенных между двумя фиксированными операторами.

Настоящая заметка посвящена вопросу о нахождении всех корректных „краевых условий“ для общих операторов, удовлетворяющих некоторым свойствам. Применение к описанию краевых условий для дифференциальных операторов будет дано в следующей заметке.

В первой части настоящей заметки мы находим общий вид „корректных расширений“ фиксированного оператора, заключенных в другом фиксированном операторе. Во второй части найденные расширения описываются с помощью „краевых условий“.

Пусть A — замкнутый линейный оператор в сепарабельном пространстве Гильберта H и $\mathfrak{D}(A)$ — его область определения, всюду плотная в H. Предположим, что A имеет ограниченный обратный оператор A^{-1}, $\| A^{-1} \| < \infty$. Обозначим через A^* оператор, сопряженный к A, и через $\mathfrak{D}(A^*)$ — его область определения. Допустим, что существует такой замкнутый оператор A', содержащийся в A^* $(A' \subset A^*)$, для которого сопряженный оператор A'^* отображает свою область определения $\mathfrak{D}(A'^*)$ на все H: $A'^*\mathfrak{D}(A'^*) = \mathfrak{R}(A'^*) = H$ (это условие всегда выполнено, если оператор A' имеет ограниченный обратный). Так как $A' \subset A^*$, то $A \subset A^{**} \subset A'^*$.

Ниже мы решаем вопрос об описании всех линейных, замкнутых расширений $\tilde{A}$ оператора A, содержащихся в A'^*: $A \subset \tilde{A} \subset A'^*$, обладающих свойствами: 1) область изменения $\mathfrak{R}(\tilde{A}) = \tilde{A}\,\mathfrak{D}(\tilde{A})$ совпадает со всем H и 2) $\tilde{A}$ имеет ограниченный обратный. Такой оператор $\tilde{A}$ будем называть корректным расширением* оператора A.

Лемма. *При указанных выше предположениях относительно A и A'^* существует по крайней мере одно корректное расширение $\tilde{A}$ оператора A $(A \subset \tilde{A} \subset A'^*)$.*

Доказательство. $\mathfrak{R}(A) = A\,\mathfrak{D}(A)$ — замкнутое подпространство. Его ортогональное дополнение совпадает с подпространством U, состоящим из всех решений u однородного уравнения $A^*u = 0$:

$$H = \mathfrak{R}(A) \oplus U. \qquad (*)$$

* Понятие корректного расширения, введенное таким образом, не охватывает всех расширений, которые следовало бы назвать корректными, а только те из них, для которых 0 не является точкой спектра.

Пусть V' — полный прообраз подпространства U при отображении A'^*: $A'^*V' = U$ (V', вообще говоря,—незамкнутое пространство). Очевидно, замкнутое подпространство U' всех решений u' однородного уравнения $A'^*u' = 0$ является частью V': $U' \subset V'$. Пусть $\overline{V}$ — ортогональное дополнение к U' в V': $V' = U' \oplus \overline{V}$. Очевидно, $A'^*(\overline{V}) = U$. Обозначим оператор, совпадающий с A'^* на прямой линейной сумме множеств $\mathfrak{D}(A)$ и $\overline{V}$: $\mathfrak{D}(A) + \overline{V}$, через $\overline{A}$.

Так как $A'^*(\overline{V}) = U$, то, согласно ($*$), $\overline{A}$ отображает свою область определения $\mathfrak{D}(\overline{A})$ на все H. Очевидно, $\overline{A}$ имеет обратный оператор $\overline{A}^{-1}$. Легко видеть, что оператор $\overline{A}^{-1}$ замкнут и, так как он задан на всем H, то он ограничен: $\| \overline{A}^{-1} \| < +\infty$. $\overline{A}$ является, следовательно, линейным, корректным расширением A. Лемма доказана.

В дальнейшем через $\overline{A}$ обозначаем некоторое фиксированное, корректное расширение оператора A (не обязательно совпадающее с построенным в лемме), через $\mathfrak{D}(\overline{A})$ — его область определения. Применяя к обеим частям формулы ($*$) оператор $\overline{A}^{-1}$, мы получим, что $\mathfrak{D}(\overline{A})$ разлагается в прямую линейную сумму:

$$\mathfrak{D}(\overline{A}) = \mathfrak{D}(A) + \overline{A}^{-1} U. \tag{1}$$

Легко видеть, что область определения $\mathfrak{D}(A'^*)$ разлагается в прямую сумму:

$$\mathfrak{D}(A'^*) = \mathfrak{D}(\overline{A}) + U' = \mathfrak{D}(A) + \overline{A}^{-1}U + U', \tag{2}$$

где U — подпространство решений u уравнения $A^*u = 0$, а U' — подпространство решений u' уравнения $A'^*u' = 0$.

Следующей теоремой описываются все корректные линейные расширения $\tilde{A}$ оператора A ($A \subset \tilde{A} \subset A'^*$).

Теорема. *Для того чтобы оператор $\tilde{A}$ был корректным расширением оператора A, необходимо и достаточно, чтобы область определения $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ разлагалась в прямую сумму:*

$$\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \mathfrak{D}(A) + (\overline{A}^{-1} + B) U, \tag{3}$$

где B — непрерывный оператор, отображающий U в U': $BU \subset U'$, и чтобы оператор $\tilde{A}$ совпадал с оператором A'^* на множестве $\mathfrak{D}(\tilde{A})$. (Разложение (3) эквивалентно следующему: область $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ состоит из всех элементов $\tilde{f}$, допускающих однозначное представление $\tilde{f} = f + \overline{A}^{-1}u + Bu$, где $f \in \mathfrak{D}(A)$, а $u \in U$.)

Доказательство. Докажем достаточность. Оператор $\tilde{A}$ отображает $\mathfrak{D}(\tilde{A})$, допускающее представление (3), на все H:

$$\tilde{A}\,\mathfrak{D}(\tilde{A}) = \tilde{A}\,\mathfrak{D}(A) + \tilde{A}[(\overline{A}^{-1} + B)U] = A\,\mathfrak{D}(A) + U = H$$

(так как $BU \subset U'$, $\tilde{A} = A'^*$ на $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ и $A'^*\overline{A}^{-1} = E$, $A'^*U' = 0$). $\tilde{A}$ имеет обратный. Действительно, пусть $\tilde{A}\tilde{f} = 0$, где $\tilde{f} \subset \mathfrak{D}(\tilde{A})$, и, значит, согласно (3), $\tilde{f} = f + \overline{A}^{-1}u + Bu$. Из равенства $\tilde{A}(f + \overline{A}^{-1}u + Bu) = 0$ следует, что $Af + u = 0$. Так как элемент u ортогонален к Af (согласно ($*$)), то $Af = 0$ и $u = 0$ и, вследствие обратимости оператора A, $f = 0$. Таким образом доказано, что из $\tilde{A}\tilde{f} = 0$ следует $\tilde{f} = f + \overline{A}^{-1}u + u = 0$. Используя непрерывность оператора B, легко показать, что оператор $\tilde{A}$ замкнут и, следовательно, $\tilde{A}^{-1}$ замкнут. Так как $\tilde{A}^{-1}$ замкнут и задан на всем H, то $\tilde{A}^{-1}$ ограничен: $\| \tilde{A}^{-1} \| < \infty$. Итак, оператор $\tilde{A}$ является корректным расширением оператора A.

Так же легко доказывается необходимость условия.

Заметим, что если $\bar{A}^{-1}$ и B — вполне непрерывные операторы, то $\tilde{A}^{-1}$ также вполне непрерывен.

Сформулированную выше теорему можно применить к дифференциальным операторам, а именно, к вопросу о нахождении всех однородных линейных и корректных краевых условий для данного дифференциального оператора, рассматриваемого в области S n-мерного пространства. Эта теорема дает описание всех линейных множеств $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ функций, заданных в S, отображаемых рассматриваемым дифференциальным оператором на все H „корректным" образом. С точки зрения применений к теории дифференциальных уравнений интересно дать описание множеств $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ с помощью некоторых краевых условий на границе области S, которым должны удовлетворять все функции из $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ и только они.

Рассмотрим этот вопрос для описанных выше общих операторов $\tilde{A}$, являющихся корректными расширениями A. Допустим, что существует оператор L_1, отображающий $\mathfrak{D}(A'^*)$ на некоторое гильбертово пространство H_1 (в случае дифференциального оператора H_1 является пространством функций, заданных на границе области S) и обладающий свойствами: 1) $L_1(\mathfrak{D}(A) + \bar{A}^{-1}U) = L_1(\mathfrak{D}(\bar{A})) = 0$, 2) L_1 отображает взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно U' на все H_1: $L_1(U') = H_1$.

Допустим далее, что существует оператор L_2, отображающий $\mathfrak{D}(A'^*)$ на некоторое гильбертово пространство H_2 (в случае дифференциального оператора H_2 является пространством функций, заданных на границе) и обладающий следующими свойствами: 1) $L_2(\mathfrak{D}(A) + U') = 0$, 2) L_2 отображает взаимно-однозначно множество $\bar{A}^{-1}U$ на H_2, причем, если ввести в множество $\bar{A}^{-1}U$ новое скалярное произведение $[\bar{A}^{-1}u, \bar{A}^{-1}u] = (u, u)$ (где (u, u) — метрика в H), то L_2 отображает $\bar{A}^{-1}U$ на H_2 взаимно-непрерывно.

Найдем сейчас „краевое условие", соответствующее области определения $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ некоторого корректного расширения $\tilde{A}$ оператора A при фиксированных операторах L_1, L_2 и $\bar{A}$.

Пусть $\tilde{f} = f + \bar{A}^{-1}u + Bu$, $f \in \mathfrak{D}(A)$, $u \in U$, — произвольный элемент, принадлежащий области определения $\mathfrak{D}(\tilde{A})$. Тогда, пользуясь свойствами оператора L_1, получим:

$$L_1\tilde{f} = L_1(f + \bar{A}^{-1}u) + L_1Bu = B_1u, \tag{4}$$

где $B_1 = L_1B$. Оператор B_1 непрерывно отображает U в H_1. Применяя к элементу $\tilde{f}$ оператор L_2, получим:

$$L_2\tilde{f} = L_2(f + Bu) + L_2\bar{A}^{-1}u = Ku, \tag{5}$$

где $K = L_2\bar{A}^{-1}$. Оператор K отображает взаимно-однозначно и взаимно-непрерывно пространство U на все H_2. Заметим, что оператор K один и тот же для всех расширений $\tilde{A}$. Применяя к обеим частям (5) оператор K^{-1}, будем иметь:

$$K^{-1}L_2\tilde{f} = u \tag{6}$$

и, подставляя (6) в (4), получим:

$$L_1\tilde{f} = B_1K^{-1}L_2\tilde{f} = QL_2\tilde{f}, \tag{7}$$

где $Q = BK^{-1}$ — оператор, непрерывно отображающий H_2 в H_1. Условию (7) удовлетворяют, очевидно, все элементы из $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ и только они. Следовательно, условие (7) является краевым условием, описывающим $\mathfrak{D}(\tilde{A})$.

Обратно, любому краевому условию вида (7), или (что равносильно) любому непрерывному оператору Q, соответствует некоторая область определения $\mathfrak{D}(\tilde{A})$ (см. (7), (6), (5), (4), (3)), состоящая из всех элементов $\tilde{f}$, удовлетворяющих условию (7), и только из них.

Поступило
7 II 1949