Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. А. АКИВИС

ФОКАЛЬНОЕ СЕМЕЙСТВО ЛУЧЕЙ КАК ОБРАЗ ПАРЫ T-КОМПЛЕКСОВ ПРИ ПЕРЕНЕСЕНИИ ПЛЮКЕРА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 2 II 1949)

1. В заметке [1] мы определили понятие пары T-комплексов как пары таких комплексов, между лучами которых установлено взаимно-однозначное соответствие так, что для каждой пары соответствующих лучей существует демиквадрика, пересекающая гармонически оба комплекса вдоль этих лучей. В этой же заметке была доказана теорема о том, что при перенесении Плюкера паре T-комплексов соответствует в пятимерном проективном пространстве P_5 такое трехпараметрическое семейство лучей, что через каждый луч проходят три развертывающиеся поверхности семейства. Такое семейство лучей было нами названо фокальным. Обозначим его через (T). Оказывается, что окрестность первого порядка луча фокального семейства лежит в четырехмерной плоскости. От этого факта мы отправляемся в настоящей работе.

Плоскости, содержащей окрестность первого порядка луча фокального семейства (T), относительно квадрики Плюкера соответствует точка; когда луч пробегает семейство (T), эта точка пробегает трехмерную поверхность (S). Касательной 3-плоскости этой поверхности полярно сопряжен соответствующий луч семейства (T). Обратно, произвольной трехмерной поверхности (S) в P_5 полярно сопряжено относительно квадрики Плюкера фокальное семейство лучей. Таким образом, произвольная пара T-комплексов при перенесении Плюкера отображается на конфигурацию $(S-T)$, состоящую из фокального семейства (T) и полярно сопряженной ему поверхности (S), причем это отображение является взаимно-однозначным.

В настоящей работе мы изучаем свойства пары T-комплексов при помощи соответствующей конфигурации $(S-T)$.

Настоящая работа близко примыкает к работе Б. А. Розенфельда [2], в которой автор, сводя геометрию пар прямых в P_3 к метрической геометрии пятимерного проективного пространства с присоединенным абсолютом (квадрика Плюкера), изучает пары T-конгруенций С. П. Финикова [3]. Но метод, использованный нами, по существу отличен от метода Розенфельда, так как мы во всех построениях используем метод Картана [4].

2. К конфигурации $(S-T)$ присоединим подвижной проективный репер таким образом, что его вершина a_0 совмещена с точкой поверхности (S), вершины a_1, a_2, a_3 лежат в ее касательной плоскости и полярно сопряжены точке a_0, точки a_4 и a_5 являются точками пересечения соответствующего луча фокального семейства (T) с квадрикой Плюкера. Аналитически эти условия записываются в виде:

$$(a_0 a_i) = 0, \quad (a_0 a_\alpha) = 0, \quad (a_i a_\alpha) = 0, \quad (a_\alpha a_\alpha) = 0, \tag{1}$$

где здесь и в дальнейшем α и β означают различные между собой фиксированные индексы 4 или 5, $i, j, k = 1, 2, 3$, а круглые скобки обозначают произведение Плюкера. Введем, кроме того, условие нормировки:

$$(a_0 a_0) = 1, \qquad (a_4 a_5) = 1$$

и обозначим (2)

$$(a_i a_j) = g_{ij}.$$

Общие уравнения инфинитезимального перемещения проективного репера имеют вид

$$da_\xi = \omega_\xi^\eta a_\eta \qquad (\xi, \eta = 0, 1, \ldots, 5), \tag{3}$$

где формы ω_ξ^η удовлетворяют уравнениям структуры проективного пространства [4]:

$$D\omega_\xi^\eta = [\omega_\xi^\zeta \omega_\zeta^\eta]. \tag{4}$$

В силу уравнений (1) и (2) компоненты инфинитезимального перемещения репера связаны рядом соотношений:

$$\omega_\alpha^0 = \omega_0^\alpha, \quad \omega_0^0 = 0, \quad \omega_4^5 = \omega_5^4 = 0, \quad \omega_4^4 + \omega_5^5 = 0,$$

$$\omega_i^0 + g_{ij}\omega_0^j = 0, \quad \omega_i^\alpha + \omega_\alpha^j g_{ji} = 0, \quad \omega_i^k g_{kj} + \omega_j^k g_{ki} = dg_{ij}. \tag{5}$$

Так как точки a_1, a_2, a_3 лежат в касательной плоскости к поверхности (S), то

$$\omega^\alpha = 0, \tag{6}$$

откуда следует, в силу (5), равносильное ему условие $\omega_\alpha^0 = 0$, означающее, что семейство лучей $[a_4 a_5]$ является фокальным.

Репер, удовлетворяющий условиям (1), (2) и (6), мы будем называть репером первого порядка. Такой репер определяется с точностью до преобразования

$$a_{i'} = A_{i'}^i a_i. \tag{7}$$

При этом преобразовании формы Пфаффа ω^i, ω_α^i, ω_i^α преобразуются по тензорному закону, так же как и система величин g_{ij}.

Система величин g_{ij} является метрическим тензором поверхности (S) в метрике, определяемой квадрикой Плюкера.

3. Дифференцируя внешним образом уравнения (6), получим:

$$[\omega^i \omega_i^\alpha] = 0, \tag{8}$$

откуда, разрешая по лемме Картана [4], найдем

$$\omega_i^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^j, \qquad b_{ij}^\alpha = b_{ji}^\alpha \quad (\alpha = 4, 5). \tag{8'}$$

В силу того, что формы ω_i^α и ω^i имеют тензорный характер, системы величин b_{ij}^α образуют дважды ковариантные симметрические тензоры. Следовательно, квадратичные формы

$$\varphi^\alpha = b_{ij}^\alpha \omega^i \omega^j \tag{9}$$

имеют инвариантный характер. Их нулевыми линиями будут асимптотические линии поверхности (S), т. е. такие линии, соприкасающиеся 2-плоскости которых лежат в трехмерной плоскости, касательной к (S). В P_3, т. е. на самой паре T-комплексов, этим асимптотическим линиям соответствуют пары линейчатых поверхностей пары T-комплексов, с которыми линейный комплекс a_0 имеет касание второго порядка вдоль соответствующих образующих.

4. Введем понятие сопряженности тройки направлений на поверхности (S), именно: мы будем говорить, что три направления, выходящие из точки a_0, сопряжены, если они будут автополярными направлениями по отношению к обеим квадратичным формам φ^α. Линии, огибающие сопряженные направления поверхности (S), будем называть сопряженными. Имеем три семейства таких линий. Отыскание сопряженных направлений приводит к системе линейных уравнений

$$(b^4_{ij} + \lambda b^5_{ij})\,\omega^j = 0. \tag{10}$$

Характеристическое уравнение этой системы $\det|b^4_{ij} + \lambda b^5_{ij}| = 0$ дает три собственных значения λ_i. Для каждого λ_i найдем из (10) единственное, вообще говоря, собственное направление. Эги направления и будут сопряжены на (S).

Но отыскание фокусов и развертывающихся поверхностей фокального семейства (T) снова приводит к системе (10). Следовательно, развертывающимся поверхностям фокального семейства (T) соответствуют сопряженные линии на поверхности (S), и обратно.

Далее, в силу того, что точке пересечения прямолинейных образующих произвольной развертывающейся поверхности в P_5 с квадрикой Плюкера в P_3 соответствует расслояемая пара линейчатых поверхностей ([2]), мы получаем, что сопряженным линиям поверхности (S) соответствуют в P_3 расслояемые пары линейчатых поверхностей, принадлежащие паре T-комплексов.

Если мы отнесем поверхность (S) к сопряженной сети, то квадратичные формы φ^α запишутся в виде сумм квадратов и $b^\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$; эти условия можно заменить им эквивалентными внешними уравнениями

$$\left[\omega^\alpha_{\bar{i}}\ \omega^{\bar{i}}\right] = 0, \tag{11}$$

где черта над буквой означает, что суммирования по i нет.

Построенный репер позволяет доказать, что луч $[a_0 a_i]$, касающийся линий i-го семейства сопряженной сети, пробегает фокальное трехпараметрическое семейство (T_i), и относительно квадрики Плюкера ему полярно сопряжена i-я фокальная поверхность (S_i) семейства (T). Далее, лучи, касательные к сопряженным линиям поверхностей (S_i), также пробегают фокальные семейства (T_{ij}), причем $(T_{ii}) \equiv (T)$, и относительно квадрики Плюкера им сопряжены соответственно поверхности (S_{ij}), причем $(S_{il}) \equiv (S)$, и т. д. Мы получаем в P_5 две последовательности фокальных семейств лучей, полярно сопряженных относительно квадрики Плюкера, а следовательно, в P_3 — две последовательности пар T-комплексов.

В общем случае сопряженные линии поверхности (S) не будут соответствовать развертывающимся поверхностям фокальных семейств (T_i). Если же потребовать, чтобы такое соответствие существовало, то мы придем к случаю, когда развертывающиеся поверхности всех фокальных семейств обеих последовательностей будут соответствовать, так же как и сопряженные линии всех фокальных поверхностей обоих семейств.

Сопряженная сеть в этом случае будет голономной. Исследование показывает существование таких поверхностей (S) с произволом шести функций двух аргументов.

5. Возвратимся к общему случаю конфигурации $(S - T)$, отнесенной к произвольному реперу первого порядка, что соответствует общему случаю пары T-комплексов в P_3.

Рассмотрим с точностью до бесконечно малых второго порядка пару бесконечно близких лучей фокального семейства (T). Отыскание общего перпендикуляра этих лучей дает два таких перпендикуляра. Если основания этих перпендикуляров на исходном луче $[a_4 a_5]$ искать в форме $a_4 + \lambda a_5$, то мы получим:

$$\lambda^2 = \frac{(a_4 d^2 a_4)}{(a_5 d^2 a_5)} = \frac{g^{ij} b^5_{ik} b^5_{jl} \omega^k \omega^l}{g^{ij} b^4_{ik} b^4_{jl} \omega^k \omega^l}, \tag{12}$$

соответствующее значению отношения $\omega^1 : \omega^2 : \omega^3$, определяющему перемещение луча.

Обозначим $\psi_\alpha = -(a_\alpha d^2 a_\alpha) = g^{ij} b^\beta_{ik} b^\beta_{jl} \omega^k \omega^l$ $(\alpha \neq \beta)$.

Формы ψ_α имеют инвариантный характер на нашей конфигурации, именно: они являются основными квадратичными формами угловой метрики поверхностей $\{a_\alpha\}$ на квадрике Плюкера. Обращение в нуль одной из них выделяет изотропные направления на поверхности $\{a_\alpha\}$, а в P_3 — развертывающиеся поверхности соответствующего комплекса пары. Одновременное обращение в нуль двух форм ψ_α выделяет на паре T-комплексов пары развертывающихся поверхностей, соответствующие в силу соответствия на комплексах, причем через каждую пару соответствующих лучей пары T-комплексов проходят четыре пары таких развертывающихся поверхностей.

Назовем главными направлениями конфигурации $(S - T)$ направления, автополярные к обеим квадратичным формам ψ_α. В каждой точке поверхности (S) найдется, вообще говоря, три таких направления, и мы будем иметь три семейства линий поверхности (S), их огибающих. Этим линиям будут соответствовать на фокальном семействе лучей (T) три семейства линейчатых поверхностей, которые мы назовем главными поверхностями. На паре T-комплексов главным поверхностям фокального семейства (T) будут соответствовать пары линейчатых поверхностей, проходящие по три через каждую пару соответствующих лучей пары T-комплексов и пересекающиеся между собой гармонически.

Если мы отнесем конфигурацию $(S - T)$ к главным направлениям, то квадратичные формы ψ_α примут канонический вид и

$$g^{ij} b^\alpha_{ik} b^\alpha_{jl} = 0 \quad \text{при } k \neq l.$$

6. Рассмотрим случай, когда главные поверхности фокального семейства (T) совпадают с его развертывающимися поверхностями. Справедливы следующие характеристические свойства этого случая: а) сопряженные линии поверхности (S) ортогональны, т. е. эта поверхность несет триортогональную систему; б) фокальное семейство лучей (T) является нормальным, т. е. допускает однопараметрическое семейство трехмерных поверхностей, ортогональных ко всем своим лучам; в) в P_3 конгруенция демиквадрик $p = a_4 + \sqrt{2}\, a_0 t - a_5 t^2$, гармонически пересекающих оба комплекса пары вдоль соответствующих лучей, также является нормальной, т. е. допускает однопараметрическое семейство комплексов, пересекающих гармонически все демиквадрики конгруенции.

Исследование показывает существование таких фокальных семейств (T) с произволом трех функций двух аргументов.

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. С. П. Финикову, под руководством которого была выполнена эта работа.

Поступило
18 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. А. Акивис, ДАН, 61, № 2 (1948). [2] Б. А. Розенфельд, Матем. сб., 23 (65) : 2 (1948). [3] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, М.—Л., 1937. [4] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, М., 1948.