Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Е. БИРМАН

РЕШЕНИЯ ДЛЯ ТОНКОСТЕННЫХ СТЕРЖНЕЙ В ПОЛИНОМАХ*

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 31 I 1949)

В нашей статье ([1]) мы привели пример решения для тонкостенного стержня в полиномах; здесь мы останавливаемся на методах решения задач этого типа.

I. Рассмотрим задачу о трубчатом стержне, закрепленном одним концом и загруженном по схеме, изображенной на рис. 1. Для этого воспользуемся нижеследующими решениями для полосы **.

1. Пусть на контуре полосы $(y=\pm a)$ $Y_y=\pm x$, $X_y=0$. Тогда

$$P(z)+iQ(z)=-\frac{i(z-ia)^4}{16a^3}-\frac{3i(z-ia)^2}{20a},$$

отсюда

$$Y_y=\frac{xy}{2a}\left(3-\frac{y^2}{a^2}\right),\quad X_x=-\frac{xy}{a}\left(\frac{3}{5}+\frac{x^2}{2a^2}-\frac{y^2}{a^2}\right),$$

$$X_y=-\frac{3x^2}{4a}\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right)+\frac{y^2}{2a}\left(\frac{3}{5}-\frac{y^2}{2a^2}\right)-\frac{a}{20}. \tag{1}$$

2. Пусть на контуре полосы $Y_y=0$, $X_y=x^2$. Тогда

$$P(z)+iQ(z)=-\frac{i(z-ia)^5}{40a^3}-\frac{i(z-ia)^3}{10a}-\frac{44ia(z-ia)}{700},$$

отсюда

$$Y_y=xy\left(1-\frac{y^2}{a^2}\right),\quad X_x=\frac{xy}{a^2}(2y^2-x^2)-\frac{6}{5}xy,$$

$$X_y=\frac{x^2}{2}\left(\frac{3y^2}{a^2}-1\right)+y^2\left(\frac{3}{5}-\frac{y^2}{2a^2}\right)-\frac{a^2}{10}. \tag{2}$$

Разрезав стержень вдоль ребер на отдельные полосы, загружаем полки обратно-симметрично касательными напряжениями $\varepsilon\gamma(x)$, а стенки — касательными $\gamma(x)$ и нормальными px, где $\varepsilon=\delta_a/\delta_b$.

---

* Имеются в виду стержни с весьма тонкими стенками, жесткость которых из своей птоскости пренебрежимо мала.

** Мы применяем решение, данное в нашей статье ([2]); обозначения сохраняем те же. (В формулах (1) названной статьи имеются опечатки: следует читать $2a\Psi'(z)-2iy\Phi'(z)$ вместо $2a\Psi'(z)+2iy\Phi'(z)$ и $2\mu(u-iv)$ вместо $2\mu(u+iv)$.)

Положив $\gamma(x) = \gamma_2 x^2 + 2\gamma_0$, получим из (2) для полки

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=-b} = \gamma_2 k\varepsilon\left(\frac{x^3}{2b} - \frac{2bx}{5}\right) + \frac{3\gamma_0 k\varepsilon x}{b} \tag{3}$$

и из (1) и (2) для стенки

$$2\mu \frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{y=a} = p\left[k\left(\frac{x^3}{4a^2} - \frac{7x}{10}\right) + x\right] -$$

$$- \gamma_2 k\left(\frac{x^3}{2a} - \frac{2ax}{5}\right) - \frac{3\gamma_0 kx}{a} \quad * . \tag{4}$$

Сравнивая (3) и (4), найдем: $\gamma_2 = \frac{p\alpha}{2a}$, $\gamma_0 = \frac{pa\alpha\beta}{3}$, где $\alpha = \frac{1}{1+\varepsilon_1}$, $\beta = \frac{1-\alpha}{5}\left(\frac{b^2}{a^2} - 1\right) + \frac{\sigma}{2}$, $\varepsilon_1 = \frac{a\delta_a}{b\delta_b}$.

Затем, применяя (2), получим для полки:

$$\begin{aligned} Y_y &= \frac{pbxy}{2a^2}(1-\alpha)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right), \\ X_x &= -\frac{pxy}{b}(1-\alpha)\left(\frac{x^2-2y^2}{2a^2} + \frac{3b^2}{5a^2} + 2\beta\right), \\ X_y &= \frac{pb}{2a^2}(1-\alpha)\left[\left(\frac{3y^2}{b^2} - 1\right)\left(\frac{x^2}{2} + \frac{2a^2\beta}{3}\right) + y^2\left(\frac{3}{5} - \frac{y^2}{2b^2}\right) - \frac{b^2}{10}\right], \end{aligned} \tag{5}$$

и, применяя (1) и (2), получим для стенки:

$$\begin{aligned} Y_y &= -\frac{pxy}{2a}\left[2 + (1-\alpha)\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right)\right], \\ X_x &= \frac{pxy}{a}\left[(1-\alpha)\left(\frac{x^2}{2a^2} - \frac{y^2}{a^2} + \frac{3}{5}\right) - 2\alpha\beta\right], \\ X_y &= p\left\{\frac{\alpha x^2}{2a} + \frac{1-\alpha}{2a}\left[\frac{3x^2}{2}\left(1 - \frac{y^2}{a^2}\right) - \right.\right. \\ &\left.\left. - y^2\left(\frac{3}{5} - \frac{y^2}{2a^2}\right) + \frac{a^2}{10}\right] + a\alpha\beta\left(\frac{y^2}{a^2} - \frac{1}{3}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{6}$$

II. Рассмотрим задачу о кручении трубчатого стержня прямоугольного сечения моментом

$$M = 2P\delta_a b + 2P_1\delta_b a = M_1 + M_2,$$

где $P\delta_a$ — касательные усилия, действующие в торцах стенок, $P_1\delta_b$ — в торцах полок. Это решение легко получить путем наложения двух решений, получающихся дифференцированием (5) и (6) дважды по x.

Таким образом, обозначив $P_1 = \varepsilon_2 P$, будем иметь для полки:

$$Y_y = 0, \qquad X_x = \frac{3P}{2b}\left(\frac{\alpha\varepsilon_2}{b^2} - \frac{1-\alpha}{a^2}\right)xy, \tag{7}$$

$$X_y = \frac{P}{4b}\left[2(1-\alpha)\varepsilon_2 + 3\alpha\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right)\varepsilon^2 + (1-\alpha)\left(\frac{3y^2}{b^2} - 1\right)\frac{b^2}{a^2}\right];$$

---

* В I и II знаки выражений соответствуют верхней полке и правой стенке. Решение для $\gamma(x) = 2$ получаем, дифференцируя дважды по x решение для $\gamma(x) = x^2$. Здесь $k = \frac{2}{1+\sigma}$.

для стенки

$$Y_y = 0, \qquad X_x = \frac{3P}{2a}\left(\frac{1-\alpha}{a^2} - \frac{\alpha\varepsilon_2}{b^2}\right)xy,$$
$$X_y = \frac{P}{4a}\left[2\alpha + 3(1-\alpha)\left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) + \varepsilon_2\alpha\left(\frac{3y^2}{a^2} - 1\right)\frac{a^2}{b^2}\right]. \tag{8}$$

Углы поворота полок и стенок относительно оси стержня соответственно будут:

$$\theta_b = \frac{v_b}{a}\bigg|_{y=0} = \frac{Pk}{16\mu ab}\left(\frac{1-\alpha}{a^2} - \frac{\alpha\varepsilon_2}{b^2}\right)x^3 + Cx + D,$$
$$\theta_a = \frac{v_a}{b}\bigg|_{y=0} = \frac{Pk}{16\mu ab}\left(\frac{\alpha\varepsilon_2}{b^2} - \frac{1-\alpha}{a^2}\right)x^3 + C_1x + D_1. \tag{9}$$

Теперь найдем такое соотношение между M_1 и M_2, чтобы деформация стержня не сопровождалась перекашиванием его поперечных сечений. Положив $\theta_a = \theta_b$, из (9) найдем

$$\varepsilon_2 = \frac{b\delta_a}{a\delta_b}, \qquad M_1 = M_2. \tag{10}$$

Внося (10) в (7) и (8) (и полагая $u = v = 0$ в точках $x = y = 0$), получим:

$$Y_y = X_x = 0, \quad X_y = \frac{P\varepsilon_2}{2b}, \quad 2\mu u = -\frac{P(1-\varepsilon_2)y}{2b}, \quad 2\mu v = \frac{P(1+\varepsilon_2)x}{2b}, \tag{7'}$$

$$Y_y = X_x = 0, \quad X_y = \frac{P}{2a}, \quad 2\mu u = \frac{P(1-\varepsilon_2)y}{2a}, \quad 2\mu v = \frac{P(1+\varepsilon_2)x}{2a}, \tag{8'}$$

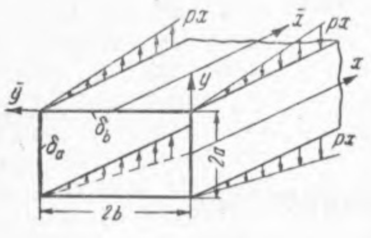

Рис. 1

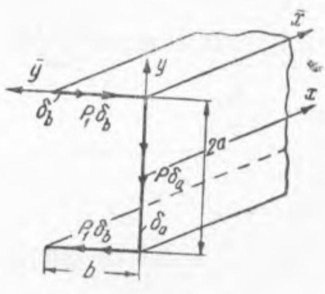

Рис. 2

и угол поворота стержня $\theta = \frac{P(1+\varepsilon_2)x}{4\mu ab}$. Это решение соответствует случаю передачи крутящих моментов на концы стержня посредством (жестких в своей плоскости) торцевых диафрагм.

III. Определим положение центра изгиба для стержня швеллерного сечения. Пусть стержень, закрепленный одним концом, загружен у свободного конца касательными усилиями $P\delta_a$ и $P_1\delta_b$, как показано на рис. 2. Опуская выкладки, приведем выражения для компонентов напряжения. В полках:

$$Y_y = 0, \quad X_x = \pm\frac{3Px\alpha_2}{a^2}\left(\frac{2}{3} - \frac{y}{b}\right) \pm \frac{6P_1x}{b^2}\left[\frac{2y}{b}(1-\alpha_2) + \frac{4\alpha_2}{3} - 1\right],$$
$$X_y = \pm\frac{6P_1y}{b^2}\left(1 - \frac{y}{b}\right) \pm \alpha_2\left(\frac{Pb}{2a^2} + \frac{2P_1}{b}\right)\left(\frac{3y^2}{b^2} - \frac{4y}{b} + 1\right); \tag{11}$$

в стенке:

$$Y_y = 0, \quad X_x = \frac{2xy}{a}\left(\frac{P\alpha_2}{a^2} - \frac{3P_1\alpha_1}{b^2}\right), \tag{12}$$

$$X_y = \frac{P}{2a} + \left(\frac{P_1\alpha_1}{b^2} - \frac{P\alpha_2}{3a^2}\right)\left(\frac{3y^2}{a^2} - 1\right)a,$$

где

$$\alpha_1 = \frac{3}{3+4\varepsilon_1}, \quad \alpha_2 = \varepsilon_1\alpha_1, \quad \varepsilon_1 = \frac{a\delta_a}{b\delta_b}.$$

Теперь найдем такое соотношение между P и P_1, при котором полки не будут изгибаться (в своих плоскостях). Положив

$$-\frac{3P\alpha_2 xy}{a^2 b} + \frac{12P_1(1-\alpha_2)xy}{b^3} = 0,$$

получим

$$P_1 = \frac{Pb^2}{4a^2}\cdot\frac{3\varepsilon_1}{3+\varepsilon_1}. \tag{13}$$

Расстояние r от центра изгиба до оси стенки определим из уравнения моментов

$$2aP_1\delta_b + rP\delta_a = 0. \tag{14}$$

Внося (13) в (14), найдем

$$r = -\frac{3b}{2(3+\varepsilon_1)}. \tag{15}$$

Внося (13) в (11) и (12), получим

$$Y_y = 0, \quad X_x = \pm\frac{P\alpha_3 x}{2a^2}, \quad X_y = \pm\frac{P\alpha_3(b-y)}{2a^2}, \tag{11'}$$

$$Y_y = 0, \quad X_x = \frac{P\alpha_3 xy}{2a^3}, \quad X_y = \frac{P}{4a}\left[2 - \frac{\alpha_3}{3}\left(\frac{3y^2}{a^2} - 1\right)\right], \tag{12'}$$

где $\alpha_3 = \dfrac{3\varepsilon_1}{3+\varepsilon_1}$.

Поступило
29 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 3 (1948). [2] С. Е. Бирман, ДАН, 62, № 2 (1948).