Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МЕХАНИКА

Н. Н. БАУТИН

О ЗАДАЧЕ Л. И. МАНДЕЛЬШТАМА В ТЕОРИИ ЧАСОВ

(Представлено академиком А. А. Андроновым 21 I 1949)

1. Простейшие часы, как механическая автоколебательная система с двумя степенями свободы, состоят из двух главных частей: балансира (регулятора), взаимодействующего с ходовым колесом, и самого ходового колеса, увлекаемого во вращение постоянным моментом. В зависимости от того, будет ли балансир обладать собственным периодом или таковым обладать не будет, мы получим часы Галилея — Гюйгенса или до-галилеевы часы.

В 1944 г. Л. И. Мандельштамом была поставлена следующая задача: сравнить производные $\partial\tau/\partial\lambda_\nu$ (где τ — период автоколебаний, а λ_ν — соответствующие параметры: постоянный момент, вращающий ходовое колесо, коэффициент восстановления неупругого удара, коэффициент вязкого трения и т. д.) для часов Галилея — Гюйгенса и для аналогичных (но без восстанавливающей силы) до-галилеевых часов. При этом Л. И. Мандельштам выразил уверенность, что это сравнение позволит точно сформулировать динамические особенности часов Галилея — Гюйгенса по сравнению с до-галилеевыми часами и, следовательно, позволит точно охарактеризовать роль восстанавливающей силы, т. е. роль пружины или маятника как стабилизатора периода автоколебаний часов.

В настоящей заметке эта задача решается для некоторой идеальной модели часов, обладающей, однако, двумя степенями свободы. Последнее обстоятельство является существенным, так как рассмотрение моделей с одной степенью свободы, во-первых, не всегда позволяет сделать правильные выводы об устойчивости интересующих теорию часов движений и, во-вторых, не позволяет проследить зависимость от параметров балансира и ходового колеса перехода часов с режима противоударов на режим подталкивающих ударов.

2. Рассмотрим, пренебрегая твердым трением, идеальную модель часов, имеющую две степени свободы ([1]). Период 2τ рассматриваемого периодического движения системы будет зависеть от параметров $J, k, p, h, \varkappa$, характеризующих: J $(J>0)$ — отношение моментов инерции балансира и ходового колеса; k $(0\leqslant k<1)$ — коэффициент восстановления при ударе; p $(p>0)$ — вращающий момент на оси ходового колеса; h $(h\geqslant 0)$ — вязкое трение и $\varkappa$ $(\varkappa\geqslant 0)$ — упругость пружины балансира. Эта зависимость для рассматриваемой модели дается, согласно ([1]), уравнением

$$p\tau^2\,[2\alpha-\beta+2(1-\alpha)\,u(h,\varkappa;\tau)]=\beta, \tag{1}$$

где $\alpha=(J-k)/(1+J)$ и $\beta=\alpha+k$; $u(h,\varkappa;\tau)$ для модели часов Галилея — Гюйгенса имеет вид:

$$u(h, \varkappa; \tau) = \frac{e^{-h\tau}\left(\cos\omega\tau + \frac{h}{\omega}\sin\omega\tau\right) + 1}{e^{-2h\tau} + 2e^{-h\tau}\cos\omega\tau + 1} \quad (\omega = \sqrt{\varkappa - h^2}), \tag{2}$$

а для модели до-галилеевых часов

$$u(h, 0; \tau) \equiv v(h, \tau) = \frac{1}{1 + e^{-2h\tau}}. \tag{3}$$

Периодическое движение будет устойчиво, если выполняются условия:

$$A = \beta(2\alpha - \beta)\frac{1}{g} + \beta(1-\alpha)[2(1-\bar{a}_1) - g(\tau)\Phi_1] > 0,$$

$$B = [\alpha^2 + (\alpha-\beta)^2](b_1 - a_1) + 2[1 + (1-\beta)^2] - 2g(1-\alpha)^2(1-\bar{a}_1)^2 +$$
$$+ [2(1-\alpha)^2 - (1-\beta)^2 - 1](1-\bar{a}_1) - \beta(1-\alpha)[2\bar{a}_0 + g\tau\Phi_2] > 0,$$
$$C = 4[1 + (\alpha-\beta)^2 b_1] - B > 0, \tag{4}$$
$$D = 2 - \frac{A+B}{2} + \frac{B-A}{2}(\alpha-\beta)^2 b_1 - 2(\alpha-\beta)^4 b_1^2 > 0,$$

где

$$\frac{1}{g} = e^{-2h\tau} + 2e^{-h\tau}\cos\omega\tau + 1, \quad b_1 = e^{-2h\tau}, \quad \bar{a}_0 = \frac{1}{\omega\tau}\sin\omega\tau,$$

$$b_1 - a_1 = e^{-2h\tau} + e^{-h\tau}\left(\frac{h}{\omega}\sin\omega\tau - \cos\omega\tau\right),$$

$$1 - \bar{a}_1 = 1 + e^{-h\tau}\left(\frac{h}{\omega}\sin\omega\tau + \cos\omega\tau\right),$$

$$\Phi_1 = e^{-h\tau}\left[\frac{h^2-\omega^2}{\omega}(1 - e^{-2h\tau})\sin\omega\tau - 2h(1 + e^{-2h\tau})\cos\omega\tau - 4he^{-h\tau}\right],$$

$$\Phi_2 = e^{-h\tau}\left[\frac{\omega^2-h^2}{\omega}(1 + e^{-2h\tau})\sin\omega\tau + 2h(1 - e^{-2h\tau})\cos\omega\tau\right].$$

3. Различие в динамических свойствах часов Галилея — Гюйгенса и до-галилеевых часов тесно связано с различием в поведении последовательностей функций $u_\nu(h_\nu, \varkappa; \tau)$ и $v_\nu(h_\nu, \tau)$ при $h_\nu \to 0$. Нетрудно показать, что для любого $\varkappa > 0$ и любого положительного $\tau \neq \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}(2n+1)$ $= 0, 1, \ldots)$ предельные значения функций u_ν и v_ν для часов Галилея — Гюйгенса и для до-галилеевых часов совпадают:

$$\lim_{h_\nu \to 0} u_\nu(h_\nu, \varkappa; \tau) = \lim_{h_\nu \to 0} v_\nu(h_\nu, \tau) = \frac{1}{2}.$$

Однако последовательность функций $u(h_\nu, \varkappa; \tau)$ для часов Галилея — Гюйгенса (в отличие от последовательности функций $v_\nu(h_\nu, \tau)$ для часов до-галилеевых) сходится при $h_\nu \to 0$ к предельной функции неравномерно и предельная функция при $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}(2n+1)$ имеет разрыв. Последовательность кривых $u_\nu(h_\nu, \varkappa; \tau)$ сходится при $h_\nu \to 0$ к предельной кривой, содержащей при $\tau = \frac{\pi}{\sqrt{\varkappa}}(2n+1)$ „отрезок“ $u \geqslant 1/2$.

На рис. 1 для часов Галилея — Гюйгенса приведены кривые зависимости полупериода τ от величины p, характеризующей вращающий момент на оси ходового колеса. Кривые построены по уравнениям (1) и (2) для различных значений h и фиксированных значений остальных параметров. Замечательным является наличие у предельной кривой горизонтального отрезка AB. Наличие такого отрезка представляет характерную особенность часов Галилея — Гюйгенса и позволяет для достаточно малого h и значений τ, близких к значению $\pi / \sqrt{\varkappa}$ (характеризующему полупериод собственных колебаний балансира), найти на кривых участки сколь угодно малого наклона. На рис. 1 и 2 жирными линиями выделены участки кривых, соответствующие устойчивым режимам, для которых условия (4) выполняются. Из рис. 1 видно, что при $h \to 0$ область устойчивых режимов изменяется таким образом, что как раз участки кривых с малым наклоном, примыкающие к отрезку AB, оказываются неустойчивыми (так как выражение для коэффициента B в (4) из-за члена $g\Phi_2$ становится при $h \to 0$ и $\omega\tau \to \pi$ отрицательным). Нельзя поэтому, распоряжаясь одной только величиной параметра h, одновременно удовлетворить требованиям заданной малости $\partial\tau/\partial p$ и условиям устойчивости.

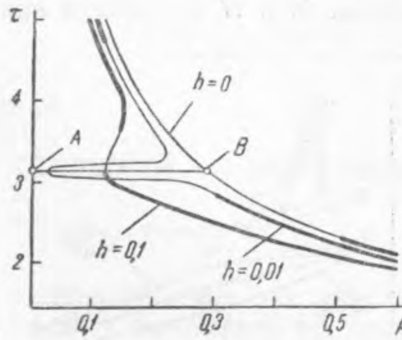

Рис. 1

Можно, однако, показать, что для часов Галилея — Гюйгенса совместным изменением параметров системы возможно одновременно удовлетворить как условиям заданной малости производных, так и условиям устойчивости.

Теорема 1. *Для рассматриваемой модели часов Галилея — Гюйгенса при любом фиксированном* τ $(\tau > 0)$, *любом фиксированном* k $(0 \leqslant k < 1)$ *и любом сколь угодно малом* $\varepsilon > 0$ *можно так выбирать значения параметров системы* $\varkappa, J, h, p$, *что будут удовлетворяться условия устойчивости периодического решения по отношению к изменению начальных условий (в смысле Ляпунова) и неравенства*

$$\frac{\partial\tau}{\partial p} < \varepsilon, \quad \frac{\partial\tau}{\partial J} < \varepsilon, \quad \frac{\partial\tau}{\partial h} < \varepsilon, \quad \frac{\partial\tau}{\partial k} < \varepsilon, \qquad (A)$$

характеризующие стабильность периода по отношению к изменению параметров.

Теорема 2. *Для рассматриваемой модели до-галилеевых часов (т. е. при* $\varkappa = 0$) *нельзя распорядиться параметрами* J, h, p *так, чтобы при фиксированных* τ *и* k *и при любом заданном* ε *удовлетворить условия* (A).

4. Различие в динамических свойствах часов Галилея — Гюйгенса, работающих в режиме с противоударами, и часов Галилея — Гюйгенса, работающих в режиме с подталкивающими ударами, устанавливается теоремой:

Теорема 3. *Пусть* ε_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ — *монотонно убывающая последовательность, сходящаяся к нулю, и* M_ν $(\varkappa_\nu, h_\nu, J_\nu; k, \tau)$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ — *соответствующая последовательность точек в пространстве параметров такая, что для каждого* ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$ *условия устойчивости периодического движения и условия* (A) *тео-*

ремы 1 выполняются. Тогда для всех ν, начиная с некоторого $\nu = N$, рассматриваемое периодическое движение будет периодическим движением с подталкивающими ударами.

5. На рис. 2 приведены кривые зависимости полупериода τ от величины p, характеризующей вращающий момент, построенные для фиксированных значений параметров $\varkappa$ и k ($\varkappa = 1$, $k = 0{,}5$) и различных h и J, связанных соотношением $\alpha \equiv \frac{J-k}{1+J} = 1 - 2h$. Жирными линиями выделены участки кривых, соответствуюшие устойчивым режимам. Точками M и N на каждой кривой выделены участки, соответствующие режиму подталкивающих ударов. Чертеж иллюстрирует теоремы 1 и 3. На рис. 2 видно, как при $h \to 0$ и $\alpha \to 1$ участки кривых, соответствующие подталкивающим ударам, стягиваются к горизонтальному отрезку предельной кривой.

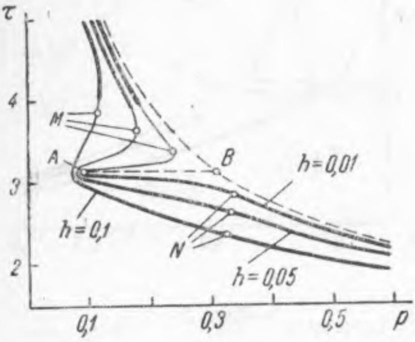

Рис. 2

6. Сравнение предельных кривых (для $h = 0$) для часов Галилея — Гюйгенса и до-галилеевых часов, совпадающих повсюду, где совпадают предельные значения функций $u(h, \varkappa; \tau)$ и $v(h, \tau)$, позволяет обнаружить для рассматриваемой модели факт точного совпадения периодов у часов Галилея — Гюйгенса и до-галилеевых часов при отсутствии затухания и равенстве всех остальных параметров (хотя амплитуда колебаний и места соударения при этом различны).

Заметим также, что для устойчивости до-галилеевых часов — в предположении мгновенной передачи импульса — необходимо условие $J < 1$ ([2]). Наличие собственного периода может сообщать устойчивость и тем режимам, где $J > 1$.

Физико-технический институт
Горьковского государственного университета

Поступило
5 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. Н. Баутин, ДАН, **61**, № 1 (1948). [2] А. А. Андронов и Ю. И. Неймарк, ДАН, **51**, № 1 (1945).