Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

И. М. СОБОЛЬ

ОБ УРАВНЕНИЯХ РИККАТИ И ПРИВОДИМЫХ К НИМ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 21 I 1949)

Мы будем рассматривать уравнение Риккати

$$z' + z^2 = A(x) \tag{1}$$

и связанное с ним соотношениями

$$z = y'/y, \qquad y = \exp\int z dx$$

линейное уравнение второго порядка

$$y'' = A(x)\,y. \tag{2}$$

Во всем дальнейшем будем предполагать, что функция $A(x)$ непрерывна на $[a, \infty)$.

Из общей теории (1) следует, что через каждую точку полуплоскости $x \geqslant a$ проходит единственное решение уравнения (1), однако решения эти могут иметь вертикальные асимптоты. Действительно, решая для уравнения (2) задачу Коши $y(x_0) = 0$, $y'(x_0) = 1$, мы получим решения уравнения (1) $z(x)$ и $\bar{z}(x)$, для которых $z(x_0 - 0) = -\infty$; $\bar{z}(x_0 + 0) = +\infty$; можно рассматривать $\bar{z}(x)$ как продолжение решения $z(x)$, но таким образом продолженное решение не будет непрерывным.

Определение 1. Назовем продолжаемым решение уравнения (1), определенное и непрерывное на полупрямой $[b, \infty)$, где $b \geqslant a$.

Очевидно, что продолжаемые решения существуют тогда и только тогда, когда решения уравнения (2) имеют на $[a, \infty)$ конечное число нулей. Во всем § 1, в котором исследуются общие свойства продолжаемых решений, будем предполагать, что продолжаемые решения существуют (причем $b = a$).

§ 1. Разобьем точки прямой $x = a$ на два класса: через точки верхнего класса проходят продолжаемые решения, через точки нижнего класса — непродолжаемые. Пусть точка M — рубеж полученного дедекиндова сечения.

Определение 2. Решение $z = z^*(x)$, проходящее через точку M, назовем граничным решением уравнения (1).

Можно показать, что граничное решение продолжаемо.

Как легко видеть, произвольная непрерывно дифференцируемая на $[a, \infty)$ функция является решением одного и только одного уравнения вида (1).

Теорема 1. *Для того чтобы произвольная непрерывно дифференцируемая на* $[a, \infty)$ *функция* $z = z^*(x)$ *была граничным решением соответствующего ей уравнения* (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^\infty \exp\left[-2\int_a^x z^*(x)\,dx\right]dx = \infty.$$

Теорема 2. *Если* $z_1(a) > z(a) > z^*(a)$, *то*

$$\int_a^\infty \{z_1(x) - z(x)\}\,dx < \infty, \qquad \int_a^\infty \{z(x) - z^*(x)\}\,dx = \infty.$$

Теорема 3. *Если* $z^*(x)$ *не имеет нулей на* $[a, \infty)$ *и* $z^{*\prime} = o(z^{*2})$, *то для любого продолжаемого не граничного решения* $z(x)$

$$\lim_{x\to\infty} z(x)/z^*(x) = -1. \tag{3}$$

Нетрудно показать, что для того, чтобы (3) имело место, необходимо, чтобы $xz^*(x) \to -\infty$ при $x \to \infty$.

В общем случае нельзя утверждать, что все продолжаемые решения, отличные от граничного, асимптотически сближаются (см. § 3)*.

Легко доказывается

Теорема 4. *Для того чтобы все продолжаемые решения* $z(x)$, *отличные от* $z^*(x)$, *асимптотически сближались, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_a^\infty z(x)\,dx = \infty. \tag{4}$$

§ 2. В этом параграфе не предполагается заранее, что продолжаемые решения существуют.

Определение 3. Уравнение (1) назовем **регулярным**, если все продолжаемые решения, кроме, быть может, одного, асимптотически сближаются.

A priori возможны три типа регулярных уравнений, которые иллюстрируются простейшим уравнением $z' + z^2 = c$ при $c < 0$, $c = 0$ $c > 0$:

1) продолжаемых решений нет;

2) продолжаемые решения есть и все они асимптотически сближаются;

3) продолжаемые решения есть и все они, кроме $z = z^*(x)$, асимптотически сближаются.

В этом параграфе устанавливается основная теорема о регулярности:

Теорема 5. *Каждого из трех условий:*

$$A(x) \leqslant 0; \quad A(x) \geqslant 0; \quad |A(x)| \leqslant c \text{ на } [a, \infty)$$

достаточно для регулярности уравнения (1).

Не останавливаясь на других достаточных условиях регулярности, перейдем к уравнению (2).

---

* $z(x)$ и $\bar{z}(x)$ асимптотически сближаются, если $|z(x) - \bar{z}(x)| \to 0$ при $x \to \infty$.

§ 3. Из теоремы 1 вытекает следующее предложение:

Теорема о минимальном решении. *Если решения уравнения* (2) *не колеблются на* $[a, \infty)$, *то существует решение* $y = y_0(x)$ (*определенное с точностью до постоянного множителя*) *такое, что* $\int^{\infty} y_0^{-2}(x)\,dx = \infty$. *Для любого решения* $y \neq cy_0$

$$\int^{\infty} y^{-2}(x)\,dx < \infty.$$

Следствие. Все решения $y \neq cy_0$ неограничены и $\lim\limits_{x\to\infty} y_0(x)/y(x) = 0$.

Теорема 4 показывает, что регулярность в применении к уравнению (2) равносильна требованию, чтобы для всех $y \neq cy_0$

$$\lim_{x\to\infty} |\, y(x)\,| = \infty.$$

Это позволяет легко строить примеры иррегулярных уравнений.

С помощью минимального решения и результатов работы ([2]) легко получить ряд предложений об асимптотическом поведении решений уравнения (2).

Отметим, во-первых, лемму:

Лемма. *Если в уравнении* (2) *для всех решений* $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x) = 0$, *то все решения неограничены.*

Мы исследуем фундаментальную систему неколеблющихся решений $\{y_0(x),\ y_1(x)\}$ уравнения (2) в случае, когда $A(x)$ не меняет знака, и покажем, что она принадлежит к одному из следующих трех типов:

$$\mathrm{I}\ \left.\begin{aligned} y_0\ (x) &\to 0,\\ y_0'\,(x) &\to 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y_1\ (x) &\to \infty,\\ y_1'\,(x) &\to \infty, \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{II}\ \left.\begin{aligned} y_0\ (x) &\to 1,\\ y_0'\,(x) &\to 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y_1\ (x) &\to \infty,\\ y_1'\,(x) &\to 1, \end{aligned}\right\}$$

$$\mathrm{III}\ \left.\begin{aligned} y_0\ (x) &\to \infty,\\ y_0'\,(x) &\to 0, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} y_1\ (x) &\to \infty,\\ y_1'\,(x) &\to 0 \end{aligned}\right\}$$

(стрелки указывают пределы при $x \to \infty$).

Тип фундаментальной системы существенно зависит от интеграла

$$\int_a^{\infty} xA(x)\,dx. \tag{5}$$

Теорема 6. *Пусть в уравнении* (2) $A(x) \geqslant 0$; *если интеграл* (5) *расходится, то фундаментальная система типа* I; *если он сходится, то фундаментальная система типа* II.

Теорема 7. *Пусть в уравнении* (2) $A(x) \leqslant 0$; *если интеграл* (5) *сходится, то фундаментальная система типа* II; *если он расходится и решения не колеблются, то фундаментальная система типа* III.

Если для всех решений уравнения (2) существуют конечные или бесконечные $\lim\limits_{x\to\infty} y'(x)$, то уравнение имеет фундаментальную систему одного из указанных трех типов. (Если решения при этом колеблются, то, по лемме, фундаментальная система будет аналогична типу III: $\max |y_0(x)|$ и $\max |y_1(x)|$ будут стремиться к ∞).

Теорема 8. *Пусть в уравнении*

$$y'' = A(x)y + B(x) \tag{6}$$

функции $A(x) \geqslant 0$ *и* $B(x)$ *непрерывны на* $[a, \infty)$. *Для всех решений уравнения* (6) *существуют конечные* $\lim_{x\to\infty} y'(x)$ *тогда и только тогда, когда сходятся интеграл* (5) *и интеграл* $\int_a^\infty B(x)\,dx$.

Поступило
19 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений, 1945, стр. 62. [2] И. М. Соболь, ДАН, 61, № 2 (1948).