Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Н. В. ПОПОВА

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ, ОСУЩЕСТВЛЯЕМЫХ ИНТЕГРАЛАМИ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 27 I 1949)

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dw}{dt} = P(w, t), \tag{1}$$

где $P(w, t)$ есть функция комплексного переменного w и действительного переменного t, рациональная относительно w при всяком t, принадлежащем некоторому замкнутому интервалу $[a, b]$, и удовлетворяющая следующим условиям.

I. Число m полюсов функции $P(w, t)$ и порядок каждого полюса не изменяются с изменением t.

II. Функции $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, представляющие подвижные полюсы $P(w, t)$, и коэффициенты $A_{lk}(t)$ разложения $P(w, t)$ по степеням разностей $w - \lambda_i(t)$ имеют на $[a, b]$ непрерывные производные.

Пусть функция $P(w, t)$ имеет в точке $w = \lambda_i(t)$ полюс порядка $n_i > 0$ и в бесконечности — полюс порядка $n_0 \geqslant 0$.

Обозначим через $\alpha_{ik}(t)$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ корни уравнения

$$(\alpha_i(t))^{n_i+1} = -\frac{1}{(n_i+1)A_{i0}(t)} \qquad \left(A_{i0}(t) = \lim_{w \to \lambda_i(t)} P(w, t)(w - \lambda_i(t))^{n_i}\right).$$

Если $n_0 > 1$, то через α_{0j} $(j = 1, 2, \ldots, \overline{n_0 - 1})$ обозначим корни уравнения

$$(\alpha_0(t))^{n_0-1} = \frac{1}{(n_0-1)A_{0n_0}(t)} \qquad \left(A_{0n_0}(t) = \lim_{w \to \infty} \frac{P(w, t)}{w^{n_0}}\right).$$

Далее, обозначим через $\omega_{ik}(t, \tau)$ $(t < \tau)$ и $v_{ik}(t, \tau)$ $(t > \tau)$ интегралы уравнения (1), удовлетворяющие, соответственно, соотношениям:

$$\lim_{t \to \tau - 0} \omega_{ik}(t, \tau) = \lambda_i(\tau), \qquad \lim_{t \to \tau - 0} \frac{\sqrt[n_i+1]{\tau - t}}{\omega_{ik}(t, \tau) - \lambda_i(t)} = \alpha_{ik}(\tau), \tag{2}$$

$$\lim_{t \to \tau + 0} v_{ik}(t, \tau) = \lambda_i(\tau), \qquad \lim_{t \to \tau + 0} \frac{\sqrt[n_i+1]{\tau - t}}{v_{ik}(t, \tau) - \lambda_i(t)} = \alpha_{ik}(\tau). \tag{3}$$

Аналогично, если $n_0 > 1$, будем обозначать через $\omega_{0j}(t, \tau)$ $(t < \tau)$ и $v_{0j}(t, \tau)$ $(t > \tau)$ интегралы, для которых выполняются, соответственно, соотношения:

$$\lim_{t \to \tau - 0} \omega_{0j}(t, \tau) = \infty, \qquad \lim_{t \to \tau - 0} \left(\omega_{0j}(t, \tau) \sqrt[n_0-1]{\tau - t}\right) = \alpha_{0j}(t), \tag{4}$$

$$\lim_{t \to \tau + 0} v_{0j}(t, \tau) = \infty, \qquad \lim_{t \to \tau + 0} (v_{0j}(t, \tau) \sqrt[n_0 - 1]{\tau - t}) = \alpha_{0j}(\tau). \tag{5}$$

Теорема 1. *При любом $\tau \subset (a, b]$ уравнение* (1) *имеет единственный интеграл $\omega_{ik}(t, \tau)$ и при $n_0 > 1$ единственный интеграл $\omega_{0j}(t, \tau)$.*

Аналогично, при любом $\tau \subset [a, b)$ уравнение (1) *имеет единственный интеграл $v_{ik}(t, \tau)$ и при $n_0 > 1$ единственный интеграл $v_{0j}(t, \tau)$* *.

Теорема 2. *Всякий интеграл $w(t)$ уравнения* (1), *стремящийся к $\lambda_i(\tau)$ при $t \to \tau - 0$ $(\tau + 0)$, удовлетворяет одному из соотношений* (2) ((3)) *и, следовательно, совпадает с одним из интегралов $\omega_{ik}(t, \tau)$ (v_{ik}).*

Всякий интеграл, стремящийся к бесконечности при $t \to \tau - 0$ $(\tau + 0)$, удовлетворяет одному из соотношений (4) ((5)) *и поэтому совпадает с одним из интегралов $\omega_{0j}(t, \tau)$ (v_{0j}).*

Интегралов, не стремящихся к определенному пределу при $t \to \tau - 0$ $(\tau + 0)$, уравнение (1) не имеет.

Пусть t и ϑ — некоторые фиксированные числа, принадлежащие $[a, b]$, $\vartheta > t$. Обозначим через $L_{ik}(t, \vartheta)$ кривую $w = \omega_{ik}(t, \tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ $(\omega_{ik}(t, t) = \lambda_i(t))$ и через $C_{ik}(\vartheta, t)$ — кривую $w = v_{ik}(\vartheta, \tau)$, $t \leqslant \tau \leqslant \vartheta$ $(v_{ik}(\vartheta, \vartheta) = \lambda_i(\vartheta))$.

Аналогично, если $n_0 > 1$, определим кривые $L_{0j}(t, \vartheta)$ и $C_{0j}(\vartheta, t)$ при помощи интегралов $\omega_{0j}(t, \tau)$ и $v_{0j}(t, \tau)$.

Теорема 3. *Кривые $L_{ik}(t, \vartheta)$, $L_{0j}(t, \vartheta)$, $C_{ik}(\vartheta, t)$, $C_{0j}(\vartheta, t)$ (при ϑ, достаточно близком к t) — простые гладкие дуги Жордана. При различных i кривые L_{ik} (C_{ik}) не пересекаются, а при одинаковых i и различных k пересекаются только в точке $\lambda_i(t)$ $(\lambda_i(\vartheta))$. Кривые L_{0j} (C_{0j}) пересекаются только в бесконечности***.

Будем обозначать через $G(t, \tau)$ область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $L_{ik}(t, \vartheta)$ $L_{0j}(t, \vartheta)$, $(i = 1, 2, \ldots, m$; $k = 1, 2, \ldots, n_i + 1$; $j = 1, 2, \ldots, n_0 - 1)$ и через $H((t, \vartheta)$ — область, полученную из плоскости проведением разрезов по кривым $C_{ik}(\vartheta, t)$ и $C_{0j}(\vartheta, t)$.

Теорема 4. *При ϑ, достаточно близком к t, интеграл уравнения* (1) $w = w(t, w_0, \vartheta)$ $(w(\vartheta, w_0, \vartheta) = w_0)$, *рассматриваемый, как функция начального значения w_0, отображает взаимно-однозначно и конформно область $H_{w_0}(t, \vartheta)$ на область $G_w(t, \vartheta)$.*

Для случая, когда функция $P(w, t)$ имеет вид:

$$w \frac{\mu(t) + w}{\mu(t) - w}, \qquad |\mu(t)| = 1,$$

исследование отображения, осуществляемого интегралами уравнения (1), было проведено П. П. Куфаревым (¹).

Физико-технический институт
Томского государственного университета

Поступило
27 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] П. П. Куфарев, Уч. зап. Томск. гос. ун-та, № 1 (1946).

* При $n_0 = 1$ интегралов, стремящихся к бесконечности при $t \to \tau \pm 0$, не существует.

** Кривые $L_{ik}(C_{ik})$ и $L_{0j}(C_{0j})$ также не пересекаются.