Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Х. Х. МУХАММЕДЖАН

К ТЕОРИИ БЕСКОНЕЧНЫХ ГРУПП, ОБЛАДАЮЩИХ ВОЗРАСТАЮЩИМ ЦЕНТРАЛЬНЫМ РЯДОМ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 24 I 1949)

В работе С. Н. Черникова о бесконечных специальных группах с конечным центром (1) показано, что существуют такие бесконечные специальные p-группы, верхний центральный ряд которых не имеет бесконечных факторов. Естественно возникает вопрос о существовании не специальных p-групп, обладающих этим свойством *. В настоящей работе показано, что группы такого рода не существуют.

§ 1. Для доказательства последнего утверждения нам понадобятся следующие предложения.

Теорема 1. *Если ряд* $1 = \mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\gamma = \mathfrak{G}$ *является верхним центральным рядом группы* $\mathfrak{G}$, *то для каждого непредельного* α *имеет место следующее соотношение:*

$$o(\mathfrak{Z}_{\alpha+1}/\mathfrak{Z}_\alpha) \leqslant o(\mathfrak{Z}_\alpha/\mathfrak{Z}_{\alpha-1}),$$

в котором $o(\mathfrak{Z}_{\alpha+1}/\mathfrak{Z}_\alpha)$ *и* $o(\mathfrak{Z}_\alpha/\mathfrak{Z}_{\alpha-1})$ *суть верхние грани порядков элементов соответственно групп* $\mathfrak{Z}_{\alpha+1}/\mathfrak{Z}_\alpha$ *и* $\mathfrak{Z}_\alpha/\mathfrak{Z}_{\alpha-1}$, *причем в случае неограниченности порядков элементов какой-нибудь из этих групп за верхнюю грань принимается символ* ∞.

Теорема 2. *Пусть* $1 = \mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\alpha \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\beta \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\gamma = \mathfrak{G}$ *есть верхний центральный ряд группы* $\mathfrak{G}$ *и* $\mathfrak{H}$ — *ее произвольный нормальный делитель. Если* $\mathfrak{Z}_\beta - \mathfrak{Z}_\alpha$ *означает множество тех элементов из* $\mathfrak{Z}_\beta$, *которые не содержатся в* $\mathfrak{Z}_\alpha$, *то при любом* $\alpha < \beta$ *из соотношения* $\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{Z}_{\beta+1} - \mathfrak{Z}_\beta) \neq 0$ *вытекает* $\mathfrak{H} \cap (\mathfrak{Z}_\beta - \mathfrak{Z}_\alpha) \neq 0$.

Следствие 1. Пересечение центра всякой группы, обладающей возрастающим центральным рядом, с каждым ее нетривиальным нормальным делителем отлично от единицы.

Следствие 2. Если группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом и подгруппа $\mathfrak{H}$ локально нормальна в ней (т. е. каждое конечное множество элементов из $\mathfrak{H}$ содержится в конечном нормальном делителе группы $\mathfrak{G}$), то $\mathfrak{H}$ содержится в группе $\mathfrak{Z}_\omega$ ее верхнего центрального ряда. В частности, если группа $\mathfrak{G}$ сама локально нормальна, то ее верхний центральный ряд кончается членом, имеющим номер, не превосходящий ω (ω — первое предельное порядковое число).

Теорема 3. *Элементы бесконечной высоты произвольной локально нормальной группы* $\mathfrak{G}$ *содержатся в ее центре.*

Следствие. Полная локально нормальная группа—абелева.

* Этот вопрос предложен мне С. Н. Черниковым.

Теорема 4. *Если длина верхнего центрального ряда какой-нибудь группы $\mathfrak{G}$ совпадает с первым предельным порядковым числом ω, то по крайней мере один его фактор не удовлетворяет условию минимальности для подгрупп.*

Теорема 5. *Если центр конечного p-расширения $\mathfrak{P}$ некоторой p-группы $\mathfrak{Z}$, обладающей возрастающим центральным рядом, удовлетворяет условию минимальности для подгрупп, то и центр группы $\mathfrak{Z}$ удовлетворяет этому условию.*

Теорема 6. *Если p-группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом, $\mathfrak{Z}_\alpha$ — произвольный член ее верхнего центрального ряда, G — какой-либо из ее элементов порядка p^{n_1}, Z_i — некоторый элемент из $\mathfrak{Z}_i$, причем i — натуральное число, и если порядки элементов центра группы $\mathfrak{G}$ в совокупности ограничены числом p^b, то порядок произведения GZ_i не превосходит числа $p^{m+(i-1)b}$, где $m = \max[n_1, n_2]$, $p^{n_2} = o(Z_i)$.*

Доказательства предложений 1, 2, 3 и 6 не представляют большого труда. Доказательство теоремы 5 можно получить, опираясь на предложение 3 из (1).

§ 2. Теорема 7. *Если p-группа $\mathfrak{G}$ обладает возрастающим центральным рядом и все факторы ее верхнего центрального ряда конечны, то она — специальная группа.*

Доказательство. Пусть

$$1 = \mathfrak{Z}_0 \subset \mathfrak{Z}_1 \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\gamma = \mathfrak{G} \tag{1}$$

верхний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$.

Если порядковое число γ — конечное, то предложение, очевидно, справедливо. Так как, ввиду теоремы 4, длина ряда (1) не может равняться числу ω, то следует рассматривать лишь случаи, когда $\gamma > \omega$.

1. Докажем сперва, что группа $\mathfrak{Z}_\omega$ из верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ имеет центр $\mathfrak{A}_\omega$, удовлетворяющий условию минимальности для подгрупп. Легко видеть, что группа $\mathfrak{A}_\omega$ бесконечна.

Поскольку центр группы $\mathfrak{G}$ конечен и числа сегмента $\omega \leqslant \tau \leqslant \gamma$ вполне упорядочены по возрастанию, то среди них существует наименьшее порядковое число β, для которого центр $\mathfrak{A}_\beta$ группы $\mathfrak{Z}_\beta$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Ввиду теоремы 5, β — число предельное. Если $\beta = \omega$, то интересующее нас предложение доказано, поэтому предположим, что $\beta > \omega$. Тогда каждая группа $\mathfrak{A}_\alpha$ ($\mathfrak{A}_\alpha$ есть центр группы $\mathfrak{Z}_\alpha$) при $\omega \leqslant \alpha < \beta$ должна содержать бесконечное множество элементов порядка p, так как иначе она удовлетворяла бы условию минимальности для подгрупп. Если $\mathfrak{A}_\alpha^{(p)}$ — подгруппа, порожденная всеми такими элементами группы $\mathfrak{A}_\alpha$, $\omega \leqslant \alpha < \beta$, то, в силу теоремы 2, нормальный делитель $\mathfrak{A}_\alpha^{(p)}$ группы $\mathfrak{G}$ имеет непустое пересечение с каждым из конечных множеств $\mathfrak{Z}_{k+1} - \mathfrak{Z}_k$, $0 \leqslant k < \omega$. Отсюда легко получить, что пересечение $\prod\limits_{\omega \leqslant \alpha < \beta}^{\infty} \mathfrak{A}_\alpha^{(p)}$ всех $\mathfrak{A}_\alpha^{(p)}$ будет содержать бесконечно много элементов порядка p. Но $\prod\limits_{\omega \leqslant \alpha < \beta}^{\infty} \mathfrak{A}_\alpha^{(p)} \subset \mathfrak{A}_\beta$. Мы пришли к противоречию, ибо, по предположению, $\mathfrak{A}_\beta$ имеет лишь конечное число элементов p-го порядка. Итак, $\beta = \omega$.

2. Мы показали, что $\mathfrak{A}_\omega$ есть бесконечная абелева группа с условием минимальности для подгрупп. Поэтому она есть конечное расширение полной абелевой группы $\mathfrak{R}$.

Рассмотрим верхний центральный ряд фактор-группы ряда $\mathfrak{G}/\mathfrak{R} = \overline{\mathfrak{G}}$:

$$\overline{1} = \overline{\mathfrak{G}}_0 \subset \overline{\mathfrak{G}}_1 \subset \ldots \subset \overline{\mathfrak{G}}_{\gamma'} = \overline{\mathfrak{G}}. \tag{1'}$$

Пусть $\mathfrak{G}_\tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant \gamma'$, есть подгруппа, соответствующая $\overline{\mathfrak{G}}_\tau$ при гомоморфизме $\mathfrak{G} \sim \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$.

Докажем, что все фактор-группы ряда (1'), имеющие натуральные индексы, конечны. В самом деле, группа $\overline{\mathfrak{G}}_0 = T$ конечна. Пусть уже доказано, что подгруппы $\overline{\mathfrak{G}}_0, \ldots, \overline{\mathfrak{G}}_c$ конечны и $\mathfrak{G}_i \subset \mathfrak{Z}_{\omega+i}$, $i = 0, \ldots, c$; $0 \leqslant c < \omega$.

Обозначим $\overline{\mathfrak{Z}}_i' = \mathfrak{Z}_\omega/\mathfrak{K} \cap \mathfrak{G}_i/\mathfrak{K}$, $i = 0, \ldots, c+1$, и пусть соответствующие им подгруппы в $\mathfrak{Z}_\omega$ будут $\mathfrak{Z}_0' = \mathfrak{K}, \ldots, \mathfrak{Z}_0', \mathfrak{Z}_{c+1}'$.

В группе $\mathfrak{Z}'_0 = \mathfrak{K}$ множество элементов каждого порядка конечно. Из индуктивного предположения вытекает, что в группах $\mathfrak{Z}_0' = \mathfrak{K}, \ldots$ $\ldots, \mathfrak{Z}_c'$ содержится для каждого натурального n лишь конечное множество элементов порядка p^n. Покажем, что это свойство присуще и группе $\mathfrak{Z}_{c+1}'$. Пусть

$$Z_1, \ldots, Z_q \tag{2}$$

какая-нибудь полная система вычетов в разложении $\mathfrak{Z}'_c$ в смежные классы по подгруппе $\mathfrak{K}$ и

$$F_1, \ldots, F_k \tag{3}$$

множество элементов порядка p^n группы $\mathfrak{Z}'_{c+1}$.

Класс элементов, сопряженных с элементом F_k, в группе $\mathfrak{G}$ является конечным, так как группа $\mathfrak{Z}_\omega$ локально нормальна в $\mathfrak{G}$. Элементы этого класса можно представить в виде

$$F_k,\ F_k Z_1' K_1, \ldots, F_k Z_{q'}' K_{q'}, \tag{4}$$

где Z_i' принадлежат к (2), $K_i \in \mathfrak{K}$, $i = 1, \ldots, q'$. Элементы системы (2) содержатся, очевидно, в группе $\mathfrak{Z}_j$ верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ при некотором натуральном j. Ввиду теоремы 6, отсюда вытекают соотношения:

$$(F_k Z_1')^{p^{m+(j-1)b}} = \ldots = (F_k Z_{q'}')^{p^{m+(j-1)b}} = 1,$$

где $m = \max[n, n']$, $p^b = o(\mathfrak{Z}_1)$, $p^{n'} = o(\mathfrak{Z}_j)$. Так как порядок каждого элемента (4) равен p^n, то, возведя их в степень $p^{m+(j-1)b}$, получим, ввиду предыдущих соотношений, следующие неравенства:

$$K_1^{p^{m+(j-1)b}} = \ldots = K_{q'}^{p^{m+(j-1)b}} = 1. \tag{5}$$

Пусть Z' — произвольный элемент системы (2), K — произвольный из элементов группы $\mathfrak{K}$, удовлетворяющих соотношениям (5). Тогда все коммутаторы элементов системы (3), совпадая с некоторыми из произведений вида $Z'K$, содержатся, очевидно, в некоторой группе $\mathfrak{Z}_{j'}$ ряда (1) при $j' < \omega$. Отсюда вытекает, что элементы (3) должны содержаться в группе $\mathfrak{Z}_{j'+1}$. Значит, число элементов любого данного порядка p^n в $\mathfrak{Z}'_{c+1}$ конечно, а поэтому конечна и $\overline{\mathfrak{Z}}'_{c+1}$. Из включения $\mathfrak{G}_c \subset \mathfrak{Z}_{\omega+c}$ вытекает, что $\mathfrak{G}_{c+1} \subset \mathfrak{Z}_{\omega+c+1}$. Теперь конечность группы $\overline{\mathfrak{G}}_{c+1}$ легко усматривается из соотношения:

$$\frac{\{\overline{\mathfrak{Z}}_\omega, \overline{\mathfrak{G}}_{c+1}\}}{\overline{\mathfrak{Z}}_\omega} \simeq \frac{\overline{\mathfrak{G}}_{c+1}}{\overline{\mathfrak{Z}}_\omega \cap \overline{\mathfrak{G}}_{c+1}} = \frac{\overline{\mathfrak{G}}_{c+1}}{\overline{\mathfrak{Z}}'_{c+1}}.$$

3. Составим ряд $\mathfrak{Z}_\omega/\mathfrak{K} \subset \mathfrak{Z}_{\omega+1}/\mathfrak{K} \subset \ldots \subset \mathfrak{Z}_\gamma/\mathfrak{K} = \mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ нормальных делителей группы $\mathfrak{G}/\mathfrak{K}$ и трансфинитную последовательность $\overline{\mathfrak{B}}_\omega, \overline{\mathfrak{B}}_{\omega+1}, \ldots$ $\ldots, \overline{\mathfrak{B}}_\alpha, \ldots, \overline{\mathfrak{B}}_\gamma = \overline{\mathfrak{G}}_1$, где $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$ есть центр фактор-группы $\mathfrak{Z}_\alpha/\mathfrak{K}$, $\omega \leqslant \alpha \leqslant \gamma$. Докажем, что группа $\mathfrak{Z}_\omega/\mathfrak{K}$ конечна.

Если предположить $\mathfrak{Z}_\omega/\mathfrak{K}$ бесконечной, то окажется, что и группа $\mathfrak{B}_\omega$ должна быть бесконечной.

Группа $\overline{\mathfrak{B}}_\gamma$, равная $\overline{\mathfrak{G}}_1$, конечна. Пусть β — наименьшее число отрезка $\omega \leqslant \tau \leqslant \gamma$, для которого группа $\overline{\mathfrak{B}}_\beta$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Опираясь на теорему 5, легко убедиться, что β — предельное порядковое число (см. пункт 1 настоящего доказательства). Покажем, что $\beta = \omega$.

Пусть $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha^{(p)}$ — подгруппа, порожденная всеми элементами p-го порядка группы $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha$. Если бы β было больше ω, то, зафиксировав произвольное натуральное число k, мы нашли бы, что, начиная с некоторого $\alpha' \geqslant \omega$, при всех α, удовлетворяющих неравенству $\alpha' \leqslant \alpha < \beta$, пересечения $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha^{(p)} \cap (\overline{\mathfrak{G}}_{k+1} - \overline{\mathfrak{G}}_k) = \mathfrak{M}_k$ совпадают. Ввиду теоремы 2, $\mathfrak{M}_k \neq 0$, так как группы $\overline{\mathfrak{B}}_\alpha^{(p)}$ по условию бесконечны. Элементы из $\mathfrak{M}_k$ входили бы и в группу $\overline{\mathfrak{B}}_\beta$, потому что β — предельное порядковое число и, следовательно, $\overline{\mathfrak{B}}_\beta$ содержала бы бесконечно много элементов порядка p, что невозможно. Значит, $\beta = \omega$. Итак, если бы $\mathfrak{Z}_\omega/\mathfrak{K}$ была бесконечной, то она содержала бы отличную от единицы полную подгруппу $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}$. В силу теоремы 3, группа $\mathfrak{K}'$, соответствующая фактор-группе $\mathfrak{K}'/\mathfrak{K}$, принадлежала бы центру группы $\mathfrak{Z}_\omega$, что невозможно ввиду максимальности $\mathfrak{K}$. Значит, $\mathfrak{Z}_\omega$, будучи конечным расширением специальной группы $\mathfrak{K}$, является специальной (см. ([3])). Утверждение этого пункта доказано.

4. Остается показать, что длина верхнего центрального ряда группы $\mathfrak{G}$ равна $\omega + k$, где k — натуральное число. Действительно, этим будет установлено, что $\mathfrak{G}$, представляя конечное расширение специальной группы $\mathfrak{Z}_\omega$, сама является специальной.

Заметим, что длина ряда (1) — γ не может равняться $\omega 2$ (в этом легко убедиться, применив теорему 4 к фактор-группе $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}$). Допустим, что $\gamma > \omega 2$. Тогда фактор-группа $\mathfrak{Z}_{\omega 2}/\mathfrak{Z}_\omega = \overline{\mathfrak{G}}'$ должна входить в верхний центральный ряд для $\mathfrak{G}/\mathfrak{Z}_\omega$ с номером ω. Ввиду результата пункта 3 настоящего доказательства, $\overline{\mathfrak{G}}'$ удовлетворяет условию минимальности для подгрупп. Следовательно, условию минимальности удовлетворяет и группа $\mathfrak{G}' = \mathfrak{Z}_{\omega 2}$. Стало быть, группа $\mathfrak{G}'$ должна являться конечным расширением полной абелевой группы $\mathfrak{K}^*$, содержащей лишь конечное множество элементов любого данного порядка. Очевидно, $\mathfrak{K}^* \subset \mathfrak{Z}_\omega$. Отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}'$ должна входить в верхний центральный ряд группы $\mathfrak{G}$ с номером $\omega + l$, где l — конечное число. Но это невозможно, ибо $\mathfrak{G}' = \mathfrak{Z}_{\omega 2}$. Полученное противоречие убеждает нас в том, что предположение $\gamma > \omega 2$ неверно. Теорема полностью доказана.

Поступило
22 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Черников, Матем. сб., **17** (59), № 1 (1945). [2] Н. Д. Адо, ДАН, **54**, № 6 (1946). [3] С. Н. Черников, Матем. сб., **7** (49), № 3 (1940). [4] С. Н. Черников, ДАН, **50**, 71 (1945).