Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

Б. ЛЕВИН

О ФУНКЦИЯХ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ, ОГРАНИЧЕННЫХ НА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ТОЧЕК

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 21 I 1949)

В ряде работ ([1],[2])* рассматривается вопрос о поведении целой функции конечной степени, ограниченной в целых вещественных точках. Основной в этой области является следующая теорема M. Cartwright'a.

Целая функция конечной степени $\nu<\pi$, *ограниченная в целых вещественных точках, ограничена на всей вещественной оси, т. е. из неравенств*

$$|G(z)|<P_\varepsilon e^{(\nu+\varepsilon)|z|} \quad \text{и} \quad |F(k)|\leqslant M \quad (\pm k=0, 1, 2, \ldots)$$

следует

$$|G(x)|\leqslant B(\nu)M \qquad (-\infty<x<+\infty).$$

В работах Boas'a и Sheffer'a ([2],[3]) даются приближенные оценки для величины $B(\nu)$. Точная оценка получена С. Н. Бернштейном ([4]).

В работах N. Levinson'a и R. P. Boas'a устанавливаются некоторые результаты относительно функций, ограниченных на последовательности нецелых вещественных точек.

Докажем следующую более общую теорему.

Теорема 1. *Если целая функция* $G(z)$ *с шириной индикаторной диаграммы* $2\nu=h_G(\pi/2)+h_G(-\pi/2)<2\pi$ *ограничена в точках* $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$

$$|G(\lambda_k)|\leqslant M \qquad (\pm k=0, 1, 2, \ldots), \tag{1}$$

причем $|k-\lambda_k|\leqslant L$ *и* $\inf|\lambda_n-\lambda_m|\geqslant 2\delta>0$ *при* $m\neq n$, *то*

$$|G(x)|\leqslant B(\nu, L, \delta)M.$$

Для доказательства построим функцию

$$\psi(z)=\lim_{N\to\infty}\left\{(z-\lambda)\prod_{-N}^{N}{}'\left(1-\frac{z}{\lambda_k}\right)\right\}, \tag{2}$$

где λ — одна из ближайших к нулю точек последовательности $\{\lambda_k\}_{-\infty}^{\infty}$, а штрих означает, что в произведении отсутствует множитель $\left(1-\frac{z}{\lambda}\right)$.

Легко видеть, что при $y=\operatorname{Im} z>2L$

$$|\psi(z)|\geqslant L\lim_{N\to\infty}\left\{\prod_{-N}^{N}{}'\left|1-\frac{z}{\operatorname{Re}\lambda_k+iL}\right|\right\}. \tag{3}$$

Обозначив через $n(t)$ при $t>0$ число точек λ_k, удовлетворяющих неравенству $0\leqslant\operatorname{Re}\lambda_k<t$, и через $-n(t)$ при $t<0$ число точек λ_k,

* В работе ([2]) есть подробная библиография.

удовлетворяющих неравенству $t < \operatorname{Re} \lambda_k < 0$, имеем $n(t) = t + \varphi(t)$, где $|\varphi(t)| \leqslant L$. Из (3) получаем:

$$\ln|\psi(z)| \geqslant \lim_{N\to\infty} \left\{ \operatorname{Re} \int\limits_{-N}^{N} \ln\left[1 - \frac{z}{t+iL}\right] dn(t) \right\} + \ln L.$$

Интегрируя по частям и переходя к пределу, получим

$$\ln|\psi(z)| \geqslant \pi|y - L| - \operatorname{Re} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{t-(z-iL)} - \frac{1}{t-iL}\right] \varphi(t)\,dt + \ln L.$$

Ядро $\operatorname{Re}\left[\frac{1}{t-iL} - \frac{1}{t-(z-iL)}\right]$ меняет знак в точках t_1 и t_2 пересечения с вещественной осью окружности, ортогональной к вещественной оси и проходящей через точки iL и $z - iL$. Заменяя в интеграле $\varphi(t)$ на $+L$ или $-L$, в зависимости от знака ядра, получаем:

$$\ln|\psi(z)| \geqslant \pi|y - L| + 2L\ln\left|\frac{t_1-(z-iL)}{t_1-iL}\right| - 2L\ln\left|\frac{t_2-z}{t_2-iL}\right| + \ln L,$$

и, наконец,

$$|\psi(z)| > O(1)\,e^{\pi|y|}\left|\frac{y}{z^2}\right|^{2L} \qquad (|y| > L). \tag{4}$$

Аналогично получается оценка

$$|\psi(z)| < O(1)\,e^{\pi|y|}\left|\frac{z^2}{y}\right|^{2L} \qquad (|y| > L). \tag{5}$$

Легко убедиться в том, что обе оценки точные*.

При $z = iy$, $|y| > L$ имеем также

$$|\psi(iy)| \leqslant |iy - \lambda| \prod_{-L-1}^{L+1}{}' \left|1 - \frac{iy}{\lambda_k}\right| \prod_{k=1}^{\infty}\left|1 + \frac{(|y|+L)^2}{k^2}\right|.$$

Отсюда получаем

$$|\psi((2L+1)i)| < C(L, \delta), \tag{6}$$

где $C(L,\delta) = 2\left(\frac{3L+2}{\delta}\right)^{2L+2} \operatorname{sh} 3\pi(L+1)$ зависит лишь от L и δ.

Нам понадобится еще оценка для $\psi'(z)$ в точках λ_k. Пусть $p = [L+1]$, $|y| \leqslant p + \delta$ и $x \geqslant 2p+1$. Заметив, что $\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1 - \frac{x}{k-p}\right|$ при $k > [x] + p + 2$, $\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1 - \frac{x}{k+p}\right|$ при $p < k < [x] - p - 1$ и $\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \geqslant \left|1 - \frac{z}{k-p}\right|$ при $k < -p$, получим

$$|\psi(z)| \geqslant |z - \lambda| \prod_{-p}^{p}\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \prod_{[x]-p-1<k<[x]+p+2}\left|1 - \frac{z}{\lambda_k}\right| \times$$

$$\times\, x^{-1}\prod_{-2p}^{2p}\left|1 - \frac{x}{k}\right|^{-1}\left|1 - \frac{x}{[x]}\right|^{-1}\left|1 - \frac{x}{[x]+1}\right|^{-1}|\sin\pi x|.$$

Аналогичную оценку можно получить также при $0 \leqslant x < 2p+1$.

Отсюда следует, что вне кружков радиуса $\delta > 0$ с центрами в точках λ_k и при $|y| \leqslant p + \delta$ верна оценка

---

* В статье (2) Boas доказывает, что при $L \leqslant \frac{1}{2}$ $|\psi(x+iy)| < \text{const}$ при $-\infty < x < \infty$ и $|y| \leqslant 1$ (см. лемму 2 на стр. 155). Доказательство Boas'а содержит ошибку.

$$|\psi(z)| \geqslant C_1(L,\delta)(1+|z|)^{-4L-1}, \tag{7}$$

где $C_1(L,\delta)$ зависит лишь от L и δ.

Далее, $|\psi'(\lambda_k)| > \min\limits_{|z-\lambda_k|=\delta} |\psi(z)(z-\lambda_k)^{-1}|$ и, следовательно,

$$|\psi'(\lambda_k)| > C_2(L,\delta)(1+|\lambda_k|)^{-4L-1}. \tag{8}$$

Из оценки (8) следует, что ряд

$$\varphi_\zeta(z) = \frac{\psi(z)}{\omega^{4p+2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\lambda_k)[\sin\omega(\zeta-\lambda_k)]^{4p+2}}{\psi'(\lambda_k)(z-\lambda_k)(\zeta-\lambda_k)^{4p+2}} \quad \left(0<\omega<\frac{\pi-\nu}{4p+2}\right)$$

равномерно сходится, причем, как это следует из (5), $\varphi_\zeta(z)$ — целая функция от z степени $\leqslant\pi$. Целая функция

$$\chi_\zeta(z) = \left\{G(z)\left[\frac{\sin\omega(\zeta-z)}{\omega(\zeta-z)}\right]^{4p+2} - \varphi_\zeta(z)\right\}\psi^{-1}(z)$$

есть функция конечной степени. Это легко следует из оценок (4) и (7) и принципа максимума.

Не нарушая общности, можно сказать, что $h_G(\pi/2) = h_G(-\pi/2) = \nu$, и, так как $h_G(\theta)$ — функция непрерывная, то из (2) следует, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ и при $\left|\theta \pm \frac{\pi}{2}\right| < \varepsilon$ верно $h_\chi(\theta) \leqslant 0$, где $h_\chi(\theta)$ — индикатор роста функции $\chi_\zeta(z)$.

Так как индикаторная диаграмма выпукла, то отсюда следует, что она сводится к точке, т. е. что степень $\chi_\zeta(z)$ равна нулю. Так как, кроме того, $\lim\limits_{y\to\infty}\chi_\zeta(iy) = 0$, то $\chi_\zeta(z)\equiv 0$ *.

Итак,

$$G(z)[\sin\omega(\zeta-z)]^{4p+2}[\omega(\zeta-z)]^{-4p-2} = \varphi_\zeta(z),$$

и после перехода к пределу при $\zeta\to z$ получаем:

$$G(z) = \frac{\psi(z)}{\omega^{4p+2}} \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\lambda_k)[\sin\omega(z-\lambda_k)]^{4p+2}}{\psi'(\lambda_k)(z-\lambda_k)^{4p+3}} \quad \left(0<\omega<\frac{\pi-\nu}{4p+2}\right)^{**}.$$

В силу (1), (6) и (7) имеем

$$|G(i(2L+1))| < \frac{2^{2p+1}C(L,\delta)}{\omega^{4p+2}C_2(L,\delta)} M \sum_{-\infty}^{\infty} \frac{(1+|\lambda_k|^2)^{2p+\frac{1}{2}}}{[(L+1)^2+|\operatorname{Re}\lambda_k|^2]^{2p+\frac{3}{2}}} <$$

$$< \frac{2^{2p+1}C(L,\delta)}{\omega^{4p+2}C_2(L,\delta)} \sum \frac{1}{1+|\operatorname{Re}\lambda_k|^2},$$

или

$$|G(\overline{2L+1}i)| < \frac{2^{2p+1}C(L,\delta)}{\omega^{4p+2}C_2(L,\delta)}\left[2p+1+2\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{1+k^2}\right]M = A(L,\delta,\nu)M.$$

Так как эта оценка зависит от L, δ, ν и M, то для $G(x+z)$ будем иметь оценку:

$$|G(x+i\,\overline{2L+3})| < A(L+1,\delta,\nu)M,$$

а по принципу Фрагмена и Линделефа для полосы $|y|\leqslant 2L+3$ та же оценка верна на всей вещественной оси, т. е.

* См., например, ([5]), стр. 771.

** При $\lambda_k = k$ эта формула выводится у Boas'a и С. Н. Бернштейна ([4]).

$$|G(x)| < A(L+1, \delta, \nu) M.$$

Теорема доказана.

С помощью этой теоремы можно несколько усилить теорему С. Н. Бернштейна о функциях, ограниченных на последовательности точек ([4], теорема 1), сняв лишнее условие $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{G_p(x)}{x^m} = 0$.

Теперь эту теорему можно сформулировать так:

*Если $G_p(z)$ — целая функция конечной степени с шириной индикаторной диаграммы $h(\pi/2) + h(-\pi/2) \leqslant 2p$ удовлетворяет условию $|G_p(a_k)| \leqslant 1$ в бесконечной последовательности точек a_k $(\pm k = 0, 1, \ldots)$, где $0 < a_{k+1} - a_k \leqslant \pi / p\mu$ $(\mu < 1)$, то**

$$\sup_{-\infty < x < \infty} |G_p(x)| \leqslant g_\mu = \frac{1}{\cos(\pi/2\mu)}$$

и степень $G_p(x)$ не выше p.

Другое обобщение теоремы M. Cartwright'а дает:

Теорема 2. *Если $f(z)$ — функция голоморфная и экспоненциального типа (1-го порядка) в правой полуплоскости $(\mathrm{Re}\, z \geqslant 0)$, с шириной индикаторной диаграммы $2\nu = h(\pi/2) + h(-\pi/2) < 2\pi$, ограничена в точках натурального ряда, то она ограничена на положительном луче $x > 0$.*

Для доказательства построим функцию

$$\chi(\zeta, z) = \frac{f(z)[\sin\omega(\zeta - z)]^2}{[\omega(\zeta - z)]^2 \sin\pi z} - \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k f(k)[\sin\omega(\zeta - k)]^2}{\omega^2(\zeta - k)^2(z-k)} \tag{9}$$

$$\left(0 < \omega < \frac{\pi - \nu}{2}\right).$$

Очевидно, $\chi(\zeta, z)$, рассматриваемая как функция от z при фиксированном ζ, есть функция не более чем экспоненциального типа при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$. С другой стороны, при некотором $\varepsilon > 0$ и $\pi/2 - \varepsilon < |\theta| \leqslant \pi/2$ верно $h_\chi(\theta) \leqslant 0$. Отсюда следует, что $\chi(\zeta, z)$ минимального типа при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$. Положив $\zeta = x$ $(x \geqslant 0)$, мы убеждаемся в том, что $|\chi(x, iy)| < N$, где N не зависит от x, и, следовательно, по принципу Фрагмена и Линделефа, имеем при $\mathrm{Re}\, z \geqslant 0$ $|\chi(x, z)| < N$.

Умножив (9) на $\sin\pi z$ и положив $z = \zeta = x$, получим

$$f(x) = \frac{\sin\pi x}{\omega^2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k f(k)[\sin\omega(x-k)]^2}{(x-k)^2} + \chi(x, x)\sin\pi x$$

или

$$|f(x)| \leqslant M\left[2 + \frac{2}{\pi\omega^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right] + N \quad \text{при } x \geqslant 0.$$

Поступило
31 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. L. Cartwright, Quarterly J. of Math. (Oxford ser.), 7, 46 (1936). [2] R. P. Boas, Duke Math. J., 6, No. 1, 148 (1940). [3] R. P. Boas and A. C. Schaeffer, ibid., 9, No. 4, 879 (1942). [4] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, № 5, 421 (1948). [5] С. Н. Бернштейн, Экстремальные свойства полиномов, 1937.

* Значение $\frac{1}{\cos(\pi/2\mu)}$ не может быть снижено, если μ — целое число ([4]).