Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

С. Я. КОГАН

О РЕШЕНИИ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА АЛЬТЕРНИРУЮЩИМ МЕТОДОМ ШВАРЦА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 28 I 1949)

Рассмотрим область D n-мерного пространства, образованную сложением двух областей D_1, D_2, ограниченных замкнутыми поверхностями S_1, S_2 $n-1$-го измерения. Будем предполагать, что поверхности S_1 и S_2, при соответствующем выборе системы координат, локально выражаются в виде:

$$x_n = \Phi_1(x_1, \ldots, x_{n-1}), \quad x_n = \Phi_2(x_1, \ldots, x_{n-1}),$$

причем функции Φ_1 и Φ_2 имеют непрерывные производные по всем переменным до 3-го порядка включительно.

Обозначим: $S_1' + S_1'' = S_1$, $S_2' + S_2'' = S_2$, l — линия пересечения поверхностей S_1 и S_2.

Задача Неймана состоит в решении уравнения Лапласа

$$\Delta u = 0 \quad \left(\Delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\right) \tag{1}$$

в области D при условиях

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_{S_1'} = f_1(P), \quad \left.\frac{du}{dn}\right|_{S_1'} = f_2(P) \quad \left(\frac{d}{dn} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \cos(n, x_i)\right), \tag{2}$$

P — точка поверхности S, $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $P \overline{\in} l$, n — нормаль к поверхности S.

Функции $f_1(P)$, $f_2(P)$ непрерывны, пусть $|f_1(P)| < A$, $|f_2(P)| < A$.

Для разрешимости задачи Неймана должно быть:

$$\int_{S_1'} f_1(x_1, \ldots, x_n)\, ds + \int_{S_2'} f_2(x_1, \ldots, x_n)\, ds = 0.$$

Будем решать эту задачу альтернирующим методом Шварца. Для этого построим последовательность гармонических функций u_i следующим образом:

$$u_{2i}(P) = \begin{cases} u'_{2i}(P), & P \in D_1, \\ u'_{2i-1}(P), & P \in D_2' = D_2 - D_1, \end{cases}$$

где u'_{2i} — решение уравнения (1) в области D_1, удовлетворяющее граничным условиям

$$\left.\frac{du_{2i}}{dn}\right|_{S_1'} = f_1(P); \qquad \left.\frac{du_{2i}}{dn}\right|_{S_1''} = \begin{cases} \varphi(P), & i = 0, \\ \left.\dfrac{du_{2i-1}}{dn}\right|_{S_1''} & i > 0; \end{cases} \qquad P \overline{\in} l;$$

$\varphi(P)$ — произвольная непрерывная функция, но такая, что

$$\int_{S_1'} f_1(P)\,ds + \int_{S_1''} \varphi(P)\,ds = 0,$$

u'_{2i-1} — значение функции u_{2i-1} в области D_2'.

Таким образом, функция u_{2i} определена в областях D_1 и D_2'.

$$u_{2i+1}(P) = \begin{cases} u'_{2i+1}(P), & P \in D_2, \\ u'_{2i}(P), & P \in D_1' = D_1 - D_2, \end{cases}$$

где u'_{2i+1} — решение уравнения (1) в области D_2, удовлетворяющее граничным условиям:

$$\left.\frac{du'_{2i+1}}{dn}\right|_{S_2'} = f_2(P), \qquad \left.\frac{du'_{2i+1}}{dn}\right|_{S_2''} = \left.\frac{du'_{2i}}{dn}\right|_{S_2''}, \qquad P \overline{\in} l;$$

u'_{2i} — значение функции u_{2i} в области $D_1' = D_1 - D_2$. Функция u_{2i+1} определена в областях D_2 и D_1'. Таким образом построена последовательность функций u_k.

Следующая лемма показывает, что все u_k являются непрерывными функциями в областях $D_1 + D_2'$ или $D_2 + D_1'$, вплоть до поверхности, а их первые производные $\partial u_k(P) / \partial x_l$ $(k = 1, 2, \ldots;\ l = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны всюду внутри соответствующих областей, а при приближении точки P к линии l по любому пути обращаются в бесконечность как $|\log^{k+1}\delta|$. Функции u_k имеют конечный интеграл Дирихле. На основании теоремы М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева ([1]) эти функции являются единственными решениями задачи Неймана в областях $D_1 + D_2'$ или $D_2 + D_1'$.

Лемма. *Пусть на поверхности S области G задана функция $F(P)$, непрерывная на S, кроме линии $l \in S$, где она обращается в бесконечность $|\log^{\alpha}\delta|$ (α — целое, δ — расстояние точки P до линии l), и, кроме того, пусть $\int_S F(P)\,ds = 0$.*

Поверхность S локально выражается в виде $x_n = \psi(x_1, \ldots, x_{n-1})$, причем функция ψ имеет производные по всем переменным, непрерывные до 3-го порядка включительно.

Тогда можно найти такое решение u задачи Неймана в области G, удовлетворяющее граничному условию

$$\left.\frac{du}{dn}\right|_S = F(P)$$

всюду, за исключением линии l, представимое в виде потенциала простого слоя с плотностью, непрерывной всюду, кроме линии l, что:

1. *Функция u непрерывна всюду в области G вплоть до поверхности.*

2. $\dfrac{\partial u(P)}{\partial x_k}$ *$(k = 1, 2, \ldots, n)$ непрерывны всюду внутри области G, а при приближении точки P к линии l по любому пути обращаются в бесконечность как $|\log^{\alpha+1}\delta|$.*

3. *Функция u имеет конечный интеграл Дирихле*

$$I[u] = \overbrace{\int \ldots \int_D}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n.$$

Можно показать, что для построенной последовательности гармонических функций u_k справедливы неравенства

$$I[u_0] > I[u_1] > \ldots > I[u_i] > \ldots \qquad (3)$$

Из неравенства (3) следует, что

$$I[u_i] < I[u_0] = A_1, \qquad (4)$$

т. е. интегралы Дирихле от функций u_i равномерно ограничены.

Кроме того,

$$I[u_{2i} - u_{2i+1}] < \varepsilon.$$

Теорема 1. *Семейство гармонических функций* $\{\varphi_k(N)\}$, *определенных в области* G *n-мерного пространства и принадлежащих пространству* L^2, *компактно в* C (*в смысле равномерной сходимости*) *внутри области* G, *если*

$$\overbrace{\int \ldots \int_G}^{n} |\varphi_k(N)|^2\, dx_1 \ldots dx_n < M^2$$

равномерно для всех k. *Предельная функция гармоническая.*

На основании этой теоремы и равномерной ограниченности интегралов Дирихле (4) можно заключить, что две последовательности функций

$$\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_k}, \quad \frac{\partial u_{2i+1}}{\partial x} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n; \quad i = 1, 2, \ldots)$$

равномерно сходятся в любой области, внутренней по отношению к $D_1 + D_2'$ и $D_2 + D_1'$. Предельные функции являются гармоническими внутри этих областей.

Нетрудно показать, что в области $D_0 \subset D$, внутренней по отношению к области D, оба предела совпадают и определяют гармоническую функцию u^k.

Так как правые части неравенств

$$\overbrace{\int \ldots \int_{D_1+D_2'}}^{n} [u_{2i}]^2\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant c_1 \overbrace{\int \ldots \int_{D_1+D_2'}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{2i}}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n,$$

$$\overbrace{\int \ldots \int_{D_2+D_1'}}^{n} [u_{2i+1}]^2\, dx_1 \ldots dx_n \leqslant c_2 \overbrace{\int \ldots \int_{D_2+D_1'}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial u_{2i+1}}{\partial x_k}\right)^2 dx_1 \ldots dx_n \; *$$

равномерно ограничены, то

$$\overbrace{\int \ldots \int_{D_1+D_2'}}^{n} [u_{2i}]^2\, dx_1 \ldots dx_n < c, \quad \overbrace{\int \ldots \int_{D_2+D_1'}}^{n} [u_{2i+1}]^2\, dx_1 \ldots dx_n < c'.$$

Следовательно, семейство $\{u_{2i}\}$ компактно в C внутри области $D_1 + D_2'$, т. е. из него можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся во всякой области, внутренней по отношению к $D_1 + D_2'$, к гармонической функции U_1.

Аналогично, семейство $\{u_{2i+1}\}$ компактно в C внутри области $D_2 + D_1'$, т. е. из него можно выделить подпоследовательность, равномерно сходящуюся во всякой области, внутренней по отношению к $D_2 + D_1'$, к гармонической функции U_2.

Так как $\frac{\partial U_1}{\partial x_k} = u^k$, $\frac{\partial U_2}{\partial x_k} = u^k$, то

$$\frac{\partial U_1}{\partial x_k} = \frac{\partial U_2}{\partial x_k}, \qquad \text{или } U_1 = U_2 + \text{const}.$$

* Эти неравенства немедленно следуют из теоремы I С. Л. Соболева ([2]).

Но все функции u_i определялись с точностью до постоянной, поэтому для определенности можно считать, что u_i удовлетворяют таким условиям:

$$\overbrace{\int\limits_{D_1+D_2'}\!\!\ldots\!\int}^{n} u_{2i}\,dx_1\ldots dx_n = 0, \qquad \overbrace{\int\limits_{D_2+D_1'}\!\!\ldots\!\int}^{n} u_{2i+1}\,dx_1\ldots dx_n = 0.$$

При этих условиях $U_1 = U_2 = U$. Функция U — гармоническая в области D.

Нужно еще доказать, что функция U удовлетворяет граничным условиям (2). Для этого докажем равностепенную непрерывность du_i / dn вблизи границы S, вне линии l.

Рассмотрим функцию

$$v_{2i}(P) = u_{2i}(P)\,\psi(P),$$

где $\psi(P) = 1$, $P \in \sigma_1$; $\psi(P)$ = непрерывная функция, дважды непрерывно дифференцируемая и такая, что на $S_1^{(2)}$ $d\psi/dn = 0$, $P \in \sigma_2$; $\psi(P) = 0$, $P \in \sigma_3$; $\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = D_1$.

Если точка $P \in \sigma_1$ или σ_3, то $\Delta v_{2i} = 0$. Если точка $P \in \sigma_2$, то

$$\Delta v_{2i}(P) = u_{2i}(P)\,\Delta\psi + 2\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_{2i}}{\partial x_k}\frac{\partial\psi}{\partial x_k} = a\mu_{2i}(P).$$

Представим функцию v_{2i} в виде суммы

$$v_{2i} = v_{2i}^{(1)} + v_{2i}^{(2)}, \qquad v_{2i}^{(1)} = \overbrace{\int\limits_{D_1}\!\!\ldots\!\int}^{n} \frac{\mu_{2i}(Q)}{r_{PQ}^{n-2}}\,d\tau, \qquad v_{2i}^{(2)} = \int\limits_{S_1} \frac{\nu_{2i}(Q)}{r_{PQ}^{n-2}}\,ds.$$

На границе S_1

$$\frac{dv_{2i}^{(1)}(P)}{dn_{P_0}} = \overbrace{\int\limits_{D_1}\!\!\ldots\!\int}^{n} \mu_{2i}(Q)\,\frac{d}{dn_{P_0}}\left(\frac{1}{r_{P_0Q}^{n-2}}\right)d\tau = f_{2i}(P_0).$$

Легко доказать, что функции $f_{2i}(P_0)$ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, т. е. $|f_{2i}(P_0)| < B$ и $|f_{2i}(P) - f_{2i}(P_0)| < \varepsilon$ при $|\overline{PP_0}| < \delta(\varepsilon)$.

Можно показать, что у функции $v_{2i}^{(2)}$ плотности ν_{2i} равномерно ограничены и равностепенно непрерывны, т. е.

$$|\nu_{2i}(Q) - \nu_{2i}(Q_0)| < \varepsilon \text{ для } \overline{QQ_0} < \delta; \qquad Q, Q_0 \in S_1^{(1)} \text{ или } S_1^{(3)}.$$

На основании этого функции $dv_{2i}^{(2)}/dn$ равностепенно непрерывны.

Следовательно, функции v_{2i}, а значит и u_{2i} имеют равностепенно непрерывные нормальные производные.

Теперь для предельной функции U получаем:

$$\left|\frac{dU(P)}{dn} - f_1(P_0)\right| \leqslant \left|\frac{dU(P)}{dn} - \frac{dU_{2i}(P)}{dn}\right| + \left|\frac{dU_{2i}(P)}{dn} - f_1(P_0)\right| < \varepsilon.$$

Аналогично

$$\left|\frac{dU(P')}{dn} - f_2(P_0')\right| < \varepsilon, \qquad \overline{P'P_0'} < \delta.$$

Следовательно, предельная функция U удовлетворяет граничным условиям (2) и является поэтому решением задачи Неймана. Как показал С. Л. Соболев, это решение единственное.

Поступило
22 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев, ДАН, **16**, № 3 (1937). [2] С. Л. Соболев, Изв. АН СССР, сер. матем., **4**, № 1 (1940).