Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

А. С. БЕЗЛЮДНЫЙ

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫМИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 26 I 1949)

В этой заметке мы имеем в виду распространить некоторые результаты С. М. Никольского ([1]) на случай функций двух переменных.

Пусть $H^{(\alpha\beta)}$ — класс функций периода 2π относительно x и y, удовлетворяющих условиям:

$$|f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)| \leqslant M|x_2-x_1|^{\alpha}+N|y_2-y_1|^{\beta}, \qquad (I)$$

$$|\Delta(f, x_1, x_2, y_1, y_2)| \leqslant C|x_2-x_1|^{\alpha}|y_2-y_1|^{\beta}, \qquad (II)$$

где

$$\Delta(f, x_1, x_2, y_1, y_2)=f(x_2, y_2)+f(x_1, y_1)-f(x_2, y_1)-f(x_1, y_2).$$

Тригонометрический интерполяционный полином порядка (mn), совпадающий с $f(x, y)$ в точках $(x_k^{(m)}, y_l^{(n)})$, где $x_k^{(m)}=\frac{2k\pi}{2m+1}$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$, $y_l^{(n)}=\frac{2l\pi}{2n+1}$, $l=0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$, выражается формулой

$$\tilde{S}_{mn}(f, x, y)= \qquad (1)$$

$$=\frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \sum_{\substack{k \\ -\pi \leqslant x_k^{(m)}<\pi}} \sum_{\substack{l \\ -\pi \leqslant y_l^{(n)}<\pi}} D_m(x-x_k^{(m)}) D_n(y-y_l^{(n)}) f(x_k^{(m)}, y_l^{(n)}),$$

где

$$D_m(t)=\frac{\sin \frac{2m+1}{2} t}{2 \sin \frac{t}{2}}. \qquad (2)$$

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы:

Теорема. *Если* $f(x, y) \subset H^{(\alpha\beta)}$, *то верхняя грань*

$$C_{mn}^{(\alpha\beta)}=\sup_{f \subset H^{(\alpha\beta)}}|f(x, y)-\tilde{S}_{mn}(f, x, y)|$$

удовлетворяет равенству:

$$C_{mn}^{(\alpha\beta)} = \frac{M \lg m}{\pi^{1-\alpha} m^{\alpha}} \left| \sin \frac{2m+1}{2} x \right| + \frac{N \lg n}{\pi^{1-\beta} n^{\beta}} \left| \sin \frac{2n+1}{2} y \right| +$$

$$+ O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O\left(\frac{\lg m \lg n}{m^{\alpha} n^{\beta}}\right). \quad (3)$$

Легко видеть, что верхняя грань имеет период по x, равный h, и по y, равный g, где $h = \frac{2\pi}{2m+1}$ и $g = \frac{2\pi}{2n+1}$, и что величина верхней грани в данной фиксированной точке (x, y) не изменится, если ее распространить на более узкий класс функций $H_*^{(\alpha\beta)}$, принадлежащих к $H^{(\alpha\beta)}$, для которых $f(x, y) = 0$, т. е.

$$C_{mn}^{(\alpha\beta)} = \sup_{f \subset H_*^{(\alpha\beta)}} | \tilde{S}_{mn}(f, x, y) |.$$

Итак, пусть $0 < x < h$, $0 < y < g$ и $f \in H_*^{(\alpha\beta)}$. Для определения интересующей нас верхней грани представим $\tilde{S}_{mn}(f, x, y)$ в следующей форме:

$$\tilde{S}_{mn}(f, x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left[\sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} D_k^{(m)} \overline{D}_l^{(n)} f_{k,l} + \right.$$

$$+ \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=1}^{n} D_{-k}^{(m)} \overline{D}_l^{(n)} f_{-k,l} + \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} D_{-k}^{(m)} \overline{D}_{-l}^{(n)} f_{-k,-l} +$$

$$\left. + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} D_k^{(m)} \overline{D}_{-l}^{(n)} f_{k,-l} \right], \quad (4)$$

где $D_k^{(m)} = D_m(x - x_k^{(m)})$, $\overline{D}_l^{(n)} = D_n(y - y_l^{(n)})$, $f_{kl} = f(x_k^{(m)}, y_l^{(n)})$.

Положим:

$$d_k^{(m)} = \sum_{i=k}^{m} D_i^{(m)} \quad (k = 1, \ldots, m); \qquad \overline{d}_l^{(n)} = \sum_{i=l}^{n} \overline{D}_i^{(n)} \quad (i = 1, \ldots, n);$$

$$d_k^{(m)} = \sum_{l=-m}^{k} D_l^{(m)} \quad (k = -m, \ldots, 0); \qquad \overline{d}_l^{(n)} = \sum_{i=-n}^{l} \overline{D}_i^{(n)} (i = -n, \ldots, 0);$$

$$\Delta_x f_{kl} = f_{kl} - f_{k-1,1}, \quad \Delta_y f_{1l} = f_{1l} - f_{1,l-1},$$

$$\Delta^2 f_{kl} = f_{k,l} + f_{k-l,l-1} - f_{k,l-1} - f_{k-1,l}.$$

Применяя преобразование Абеля к каждой из четырех сумм (4), получим:

$$\tilde{S}_{mn}(f, x, y) = \frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \left[d_1^{(m)} \overline{d}_1^{(n)} f_{11} + \overline{d}_1^{(n)} \sum_{k=2}^{m} d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,1} + \right.$$

$$+ d_1^{(m)} \sum_{l=2}^{n} \overline{d}_l^{(n)} \Delta_y f_{1,l} + \sum_{k=2}^{m} \sum_{l=2}^{n} d_k^{(m)} \overline{d}_l^{(n)} \Delta^2 f_{k,l} +$$

$$+ d_0^{(m)} \bar{d}_1^{(n)} f_{01} + d_0^{(m)} \sum_{l=2}^{n} \bar{d}_l^{(n)} \Delta f_{0l} + \bar{d}_1^{(n)} \sum_{k=1}^{m} \Delta f_{-k,1} d_k^{(m)} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=2}^{n} d_{-k}^{(m)} \bar{d}_l^{(n)} \Delta^2 f_{-k\, l} + d_0^{(m)} \bar{d}_0^{(n)} f_{00} + d_0^{(m)} \sum_{l=1}^{n} \bar{d}_{-l}^{(n)} f_{0,-l} +$$

$$+ \bar{d}_0^{(n)} \sum_{k=1}^{m} d_{-k}^{(m)} \Delta_x f_{-k,0} + \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} d_{-k}^{(m)} \bar{d}_{-l}^{(n)} \Delta^2 f_{-k,-l} + d_1^{(m)} \bar{d}_0^{(n)} f_{10} +$$

$$+ \bar{d}_0^{(n)} \sum_{k=2}^{m} d_k^{(m)} \Delta_x f_{k,0} + d_1^{(m)} \sum_{l=1}^{n} \bar{d}_{-l}^{(n)} \Delta f_{1,-l} + \sum_{k=2}^{m} \sum_{l=1}^{n} d_k^{(m)} \bar{d}_{-l}^{(n)} f_{k,-l} \Big]. \tag{5}$$

В силу условий (I) и (II) и того, что $d_k^{(m)} = O(m)$, будем иметь:

$$|f_{11}| \leqslant Mh^\alpha + Ng^\beta, \quad |f_{01}| \leqslant Mh^\alpha + Ng^\beta, \quad |f_{10}| \leqslant Mh^\alpha + Ng^\beta; \tag{6}$$

$$\frac{4}{(2m+1)(2n+1)} \Big[d_1^{(m)} d_1^{(n)} f_{11} + d_1^{(m)} d_0^{(n)} f_{10} + d_0^{(m)} d_1^{(n)} f_{01} +$$

$$+ d_0^{(m)} d_0^{(n)} f_{00}\Big] = O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}). \tag{6'}$$

Принимая во внимание, что

$$\frac{1}{2m+1} \sum_{k=2}^{m} |d_k^{(m)}| = \frac{\left|\sin \frac{2m+1}{2} x\right|}{4\pi} \lg m + O(1) \tag{7}$$

и что величина $\frac{1}{2m+1} \sum_{k=1}^{m} |d_{-k}^{(m)}|$ отличается от (7) на ограниченную. величину, а также, что

$$\frac{2}{2m+1} (d_1^{(m)} + d_0^{(m)}) = 1, \; O\left(\frac{1}{m^\alpha} \cdot \frac{1}{n}\right) \leqslant \left(\frac{1}{m^\alpha}\right), \tag{8}$$

получим:

$$|\tilde{S}_{mn}(f, x, y)| \leqslant \frac{4}{2m+1} \left| \frac{2(d_0^{(n)} + d_1^{(n)})}{2n+1} Mh^\alpha \sum_{k=2}^{m} |d_k^{(m)}| + O(m^{-\alpha}) \right| +$$

$$+ \frac{4}{2n+1} \left| \frac{2(d_1^{(m)} + d_0^{(n)})}{2m+1} Ng^\beta \sum_{l=2}^{n} |d_l^{(n)}| + O(n^{-\beta}) \right| +$$

$$+ O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O\left(\frac{\lg m \lg n}{m^\alpha n^\beta}\right). \tag{9}$$

На основании (7), (8), а также принимая во внимание значения величин h и g, неравенство (9) примет вид:

$$|\tilde{S}_{mn}(f, x, y)| \leqslant \frac{4}{2m+1} Mh^\alpha \sum_{k=2}^{m} |d_k^{(m)}| + \frac{4}{2n+1} Ng^\beta \sum_{l=2}^{n} |d_l^{(n)}| +$$

$$+ O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O\left(\frac{\lg m \lg n}{m^\alpha n^\beta}\right) =$$

$$= \frac{M \lg m}{\pi^{1-\alpha} m^{\alpha}} \left| \sin \frac{2m+1}{2} x \right| + \frac{N \lg n}{\pi^{1-\beta} n^{\beta}} \left| \sin \frac{2n+1}{2} y \right| +$$

$$+ O(m^{-\alpha}) + O(n^{-\beta}) + O\left(\frac{\lg m \lg n}{m^{\alpha} n^{\beta}}\right). \qquad (10)$$

Докажем, что для всякой пары индексов m и n существует функция $f_{mn}(x, y) \subset H^{(\alpha\beta)}$, для которой оценка (10) достигается.

Возьмем функцию

$$f_{mn}(x, y) = M\varphi_m(x) + N\psi_n(y), \qquad (11)$$

где

$$(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant t \leqslant x_1{}^{(m)}; \\ -\dfrac{(t - x_1{}^{(m)})^{\alpha}}{2}, & \text{если } x_1{}^{(m)} \leqslant t \leqslant x_2{}^{(m)}; \\ -\dfrac{(-t)^{\alpha}}{2}, & \text{если } x_{-1}^{(m)} \leqslant t \leqslant 0; \\ \left[\dfrac{h^{\alpha}}{2} - (t - x_k{}^{(m)})^{\alpha}\right](-1)^{k+1}, & \text{если } x_k{}^{(m)} \leqslant t \leqslant x_{k+1}^{(m)} \\ & (k=2, 3, \ldots, m); \\ \left[\dfrac{h^{\alpha}}{2} - (t - x_k{}^{(m)})^{\alpha}\right](-1)^{k} & \text{если } x_k{}^{(m)} \leqslant t \leqslant x_{k+1}^{(m)} \\ & (k = -2, -3, \ldots, -m); \end{cases}$$

$$\psi_n(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant z \leqslant y_1{}^{(n)}; \\ -\dfrac{(z - y_1{}^{(n)})^{\beta}}{2}, & \text{если } y_1{}^{(n)} \leqslant z \leqslant y_2{}^{(n)}; \\ -\dfrac{(-z)^{\beta}}{2}, & \text{если } y_{-1}^{(n)} \leqslant z \leqslant 0; \\ \left[\dfrac{g^{\beta}}{2} - (z - y_l{}^{(n)})^{\beta}\right](-1)^{l+1}, & \text{если } y_l{}^{(n)} \leqslant z \leqslant y_{l+1}^{(n)} \\ & (l = 2, 3, \ldots, n); \\ \left[\dfrac{g^{\beta}}{2} - (z - y_l{}^{(n)})^{\beta}\right](-1)^{l}, & \text{если } y_l{}^{(n)} \leqslant z \leqslant y_{l+1}^{(n)} \\ & (l = -2, -3, \ldots, -n). \end{cases}$$

Эти функции удовлетворяют условию Липшица степени α и β соответственно в каждом из рассматриваемых интервалов, но они также удовлетворяют этому условию на всей действительной оси ([1], стр. 22).

Нетрудно установить, что $f_{mn}(x, y) \subset H^{(\alpha\beta)}$.

Подставив функцию (11) в выражение (5), получим правую часть неравенства (10).

Таким образом, полученная оценка есть точная асимптотическая, что и доказывает нашу теорему.

П р и м е ч а н и е. Автором распространены на случай функций двух переменных результаты С. М. Никольского, относящиеся к приближению периодических функций суммами Фейера и интерполяционными полиномами типа Фейера.

Поступило
28 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. М. Н и к о л ь с к и й, Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, **15** (1945).