Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 3

МАТЕМАТИКА

И. Е. БАЗИЛЕВИЧ

О ТЕОРЕМАХ ИСКАЖЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТАХ ОДНОЛИСТНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 31 I 1949)

1. Рассмотрим класс Σ функций $F(\zeta)=\zeta+\alpha_0+\frac{\alpha_1}{\zeta}+\ldots$, однолистных и регулярных в круге $|\zeta|>1$, кроме полюса $\zeta=\infty$ не принимающих значения нуль, и класс S функций $f(z)=z+c_2z^2+\ldots$, однолистных и регулярных в круге $|z|<1$. Основные результаты, полученные мной при исследовании этих функций, состоят в следующем.

Теорема 1. *Если $F(\zeta)\subset\Sigma$, то при любых ζ_1 и ζ_2 из $|\zeta|>1$ справедливо неравенство*:

$$\left|\ln\frac{F(\zeta_1)-F(\zeta_2)}{\zeta_1-\zeta_2}\right|\leqslant\ln\frac{|\zeta_1|\,|\zeta_2|}{\sqrt{|\zeta_1|^2-1}\sqrt{|\zeta_2|^2-1}}. \tag{1}$$

В частности, при $|\zeta_1|=|\zeta_2|=\rho>1$ отсюда следуют неравенства

$$\frac{\rho^2-1}{\rho^2}\leqslant\frac{|F(\zeta_1)-F(\zeta_2)|}{|\zeta_1-\zeta_2|}\leqslant\frac{\rho^2}{\rho^2-1}, \tag{1'}$$

содержащие неравенства Голузина ([1]) и Левнера ([2]).

Преобразованием $F(\zeta)=\frac{1}{f(1/\zeta)}$ получаем соответствующие неравенства для функций S, а также для подкласса S ограниченных функций. Следствием этого является усиление некоторых теорем Голузина.

Метод доказательства опирается на параметрическое представление некоторых подклассов функций Σ с помощью дифференциального уравнения Левнера ([3]).

2. Теорема 2. *Если $f(z)\subset S$, то для любых пар (z_1, z_2) и $(f(z_1), f(z_2))$, подчиненных условиям $|z_1|=|z_2|=r<1$ и $|f(z_1)|=|f(z_2)|$, справедливы точные неравенства*:

$$\frac{1-r}{1+r}\left|\operatorname{tg}\frac{\arg z_1-\arg z_2}{4}\right|\leqslant\left|\operatorname{tg}\frac{\arg f(z_1)-\arg f(z_2)}{4}\right|\leqslant\frac{1+r}{1-r}\left|\operatorname{tg}\frac{\arg z_1-\arg z_2}{4}\right|. \tag{2}$$

Знаки равенства имеют место только для

$$f^*(z_1)=\frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2},\qquad 2\alpha=\arg z_1+\arg z_2.$$

Метод доказательства тот же.

Соответствующие неравенства получаются для функций класса Σ.

3. На основании теорем 1 и 2 доказывается

Теорема 3. *Если функция* $f(z) \subset S$, *то при любых* r, $0 \leqslant r < 1$ *и* $x \geqslant e^{\pi/e} r$ *пересечение окружности* $|W| = x$ *с областью* $D(r)$, *на которую* $f(z)$ *отображает* $|z| \leqslant r$, *имеет линейную меру* $l(r, x)$, *не бо́льшую, чем пересечение той же окружности с областью* $D^*(r)$, *соответствующей функции* $f^*(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$, *т. е.*

$$l(r,x) \leqslant 4x \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{1+r}{1-r}\sqrt{\frac{r - x(1-r)^2}{x(1+r)^2 - r}}\right), \tag{3}$$

если $e^{\pi/e} r \leqslant x \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}$ *и* $l(r, x) = 0$ *при* $x > \frac{r}{(1-r)^2}$.

Отсюда легко получаются соответствующие предложения для функций класса Σ, а также для симметричных функций вида $F_s(\zeta) = \sqrt[s]{F(\zeta^s)}$ и $f_s(z) = \sqrt[s]{f(z^s)}$.

Следствием теоремы 3 является

Теорема 4. *Каковы бы ни были функция* $f_s(z)$ *и число* $\alpha \geqslant 0$, *справедлива следующая оценка полярного момента площади* $\sigma_s(r)$ *области* $D_s(r)$:

$$I_\alpha = \int_0^r \rho\, d\rho \int_0^{2\pi} |f_s(\rho e^{i\varphi})|^\alpha |f_s'(\rho e^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^r \rho^{\alpha+1} d\rho \int_0^{2\pi} \frac{|1+\rho^s e^{is\varphi}|^2 d\varphi}{|1-\rho^s e^{is\varphi}|^{\frac{4+2\alpha}{s}+2}} + C_s(r, \alpha), \tag{4}$$

где $C_s(r, \alpha)$ — *положительная величина, стремящаяся к нулю при фиксированном* α *и* $r \to 1$. *Оценка* (4) *отличается от точной не более, чем на* $C_s(r, \alpha)$.

В частности, имеем оценки площадей:

$$\sigma(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |c_n|^2 r^{2n} \leqslant \pi r^2 \frac{1 + 4r^2 + r^4}{(1-r^2)^4} + c(r), \tag{4^1}$$

где $c(r) \to 0$ при $r \to 1$;

$$\sigma_2(r) = \pi \sum_{n=1}^{\infty} n\, |c_n|^2 r^{2n} \leqslant \pi r^2 \frac{1+r^4}{(1-r^4)^2} + 13r^2(1-r^2). \tag{4^2}$$

Далее, так как

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(re^{i\varphi})|^2 d\varphi = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = 2\int_0^r \sum_{n=1}^{\infty} n\, |c_n|^2 \rho^{2n-1} d\rho =$$

$$= 2\int_0^r \frac{\sigma_s(\rho)}{\pi\rho}\, d\rho$$

и

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_s(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_{2s}(\sqrt{r} e^{i\varphi/2})|^2 d\varphi,$$

то из теоремы 4 следует

Теорема 5. *Если функция* $f_s(z) \subset S$, *то справедливы следующие оценки интегралов:*

$$\int_0^{2\pi} |f_s(re^{i\varphi})|^2 d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{r^2 d\varphi}{|1 - r^s e^{is\varphi}|^{4/s}} + \text{const},$$
$$\int_0^{2\pi} |f_s(re^{i\varphi})| d\varphi \leqslant \int_0^{2\pi} \frac{r\, d\varphi}{|1 - r^s e^{is\varphi}|^{2/s}} + \text{const}, \tag{5}$$

где константы легко оцениваются.

Так как при разложении $f(z) \subset S$ в ряд $f(z) = z + c_2 z^2 + \ldots$ имеем оценку Литтльвуда

$$|c_n| r^n \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(re^{i\varphi})| d\varphi = 2\int_0^{\sqrt{r}} \frac{\sigma_2(\rho)}{\pi\rho} d\rho,$$

то на основании оценки (4^2) площади $\sigma_2(\rho)$ получаем:

$$|c_n| < 1{,}674 n, \qquad n > 4;$$
$$|c_n| < 1{,}52\, n, \qquad n > 10; \tag{6}$$
$$|c_n| < 1{,}38\, n, \qquad n > 100.$$

Полагая $\alpha_n = \sup |c_n|$ в семействе S, будем иметь: $\overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} \frac{\alpha_n}{n} \leqslant \frac{e}{2} = 1{,}359\ldots$

Замечание. Константа $e^{\pi/e}$ в теореме 3 не является наилучшей, но она не может быть заменена числом $c < 1$, как показывает рассмотрение линий уровня функций $W = z$ и $W = \frac{z}{(1-z)^2}$.

Поступило
29 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. М. Голузин, Матем. сб., **19** (61), 183 (1946). [2] Ph. Frank u. *K*. Löwner, Math. Z., **3**, 78 (1919); И. Базилевич, Матем. сб., **2** (44), 4 (1937) [3] K. Löwner, Math. Ann., **89** (103) (1923); И. Базилевич, Матем. сб., **1** (43):3 (1936); **2** (44) : 4 (1937).