Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ВОЗМУЩЕНИЯ ОТ ТОЧЕЧНОГО ИСТОЧНИКА В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ, ПОКРЫТОМ СЛОЕМ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 3 I 1949)

1. Предполагается, что слой сжимаемой жидкости глубины H покрывает упругое полупространство; на глубине y_0 под границей раздела действует в момент $t=0$ мгновенный сосредоточенный источник колебаний типа центра расширения. Процесс распространения колебаний при $t>0$ описывается с помощью трех функций $\varphi_1(x, y, t)$, $\varphi_2(x, y, t)$, $\psi_2(x, y, t)$. Точная постановка этой задачи и ее решение были изложены в статье [1]. Форма, в которой было дано там решение, неудобна для изучения его при $t\to\infty$. Поэтому в настоящей работе я даю другую форму решения и изучаю его с точки зрения равномерно движущегося наблюдателя при больших значениях времени. Обозначения, принятые в статье [1], сохраняются и здесь.

Для перехода к новой форме решения вводится функция $\Omega(z, \xi)$, определенная для $|\xi|<1$ формулой

$$\Omega(z, \xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\xi^{k-1}}{z-k}. \tag{1}$$

Аналитическое продолжение этой функции в область $|\xi|>1$ дается формулами

$$\text{при}\quad \operatorname{Re}(z)<1 \qquad \Omega(z, \xi)=-\int_0^1\frac{dt}{(1-\xi t)t^z}; \tag{2}$$

$$\text{при}\quad \operatorname{Re}(z)>0 \qquad \Omega(z, \xi)=\xi^{z-1}\pi\operatorname{cotg}\pi z\mp\pi i\xi^{z-1}+\int_1^{\infty}\frac{dt}{(1-\xi t)t^z}. \tag{2'}$$

Функция ξ^z понимается как $e^{z\ln\xi}$, где $-\pi<\arg(\xi)\leqslant\pi$. В формуле (2') верхний знак надо взять, если $0<\arg(\xi)\leqslant\pi$, нижний знак — если $-\pi<\arg(\xi)<0$.

Можно доказать, что

1) При всех значениях z, кроме значений $z=1, 2, 3, \ldots$, функция $\Omega(z, \xi)$ есть аналитическая функция ξ в разрезанной вдоль луча $(1, +\infty)$ плоскости этой переменной. Предельные значения функции на обоих берегах разреза удовлетворяют соотношению

$$\Omega(z, \xi_+)-\Omega(z, \xi_-)=-2\pi i\xi^{z-1}. \tag{3}$$

2) Если ξ не принадлежит лучу $(1, +\infty)$, то $\Omega(z, \xi)$ есть мероморфная функция z, имеющая простые полюсы в точках $z=1, 2, 3, \ldots$ с вычетами, соответственно равными $1, \xi, \xi^2, \ldots$

Решение задачи, изучавшейся в статье ([1]), может быть выражено через функцию $\Omega(z, \xi)$ так:

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x, y, t) &= \frac{1}{\pi a_2}\int\limits_L \frac{1-2b_2^2\theta^2}{\varkappa_1(r+R)}\,\frac{d\theta}{(\tau+\varkappa y_1-\varkappa_2 y_0)^2} + \\
&+ \frac{1}{4\pi a_2 H^2}\int\limits_L \frac{1-2b_2^2\theta^2}{\varkappa_1^{\circ}(r+R)}\left\{\frac{r-R}{r+R}\,\Omega_z'\left(\frac{\tau+\varkappa_1 y-\varkappa_2 y_0}{2\varkappa_1 H}, \xi\right) - \right. \\
&\left. - \Omega_z'\left(\frac{\tau-\varkappa_1 y-\varkappa_2 y_0}{2\varkappa_1 H}, \xi\right)\right\} d\theta, \\
\varphi_2(x, y, t) &= \frac{1}{2\pi a_2}\int\limits_L \frac{d\theta}{[\tau+\varkappa_2(y-y_0)]\varkappa_2} - \frac{1}{2\pi a_2}\int\limits_L \frac{R^*-r}{R+r}\,\frac{d\theta}{[\tau-\varkappa_2(y+y_0)]\varkappa_2} - \\
&- \frac{1}{\pi a_2 H}\int\limits_L \frac{r(1-2b_2^2\theta^2)^2}{\varkappa_1\varkappa_2(r+R)^2}\,\Omega\left(\frac{\tau-\varkappa_2(y+y_0)}{2\varkappa_1 H}, \xi\right) d\theta, \qquad (4) \\
\psi_2(x, y, t) &= \frac{2b_2^2}{\pi a_2}\int\limits_L \frac{\theta(1-2b_2^2\theta^2)}{r+R}\,\frac{d\theta}{\tau-\lambda_2 y-\varkappa_2 y_0} + \\
&+ \frac{2b_2^2}{\pi a_2 H}\int\limits_L \frac{r\theta(1-2b_2^2\theta^2)}{\varkappa_1(r+R)^2}\,\Omega\left(\frac{\tau-\lambda_2 y-\varkappa_2 y_0}{2\varkappa_1 H}, \xi\right) d\theta.
\end{aligned}$$

Контур интегрирования L охватывает на плоскости комплексного переменного θ отрезок $\left(-\frac{1}{c}, +\frac{1}{c}\right)$. В справедливости этого утверждения можно убедиться с помощью неограниченного расширения контура L; принимая во внимание свойства функции Ω, можно получить из (4) формулы (4) статьи ([1]).

Пусть наблюдатель движется в направлении положительной оси Ox с постоянной скоростью g. Полагая $x = gt$, $y = \text{const}$, изучим с асимптотической точки зрения функции φ_1, φ_2, ψ_2 при больших значениях t. Предполагаем, как и в статье ([1]), наличие неравенств

$$a_2 > b_2 > a_1, \qquad \rho_2 > \rho_1.$$

Кроме того, предположим еще, что $c_2 < a_1$ (аналогично изучается противоположный случай). Область возможных значений g разобьем на два промежутка

$$0 \leqslant g < a_1, \qquad a_1 < g < a_2,$$

которое изучим поочередно. Остановимся на исследовании функции $\varphi_2(x, y, t)$.

2. Предполагаем, что $0 \leqslant g < a_1$. На обоих берегах разрезов $\left(\frac{1}{a_1}, \frac{1}{c_2}\right)$ и $\left(-\frac{1}{c_2}, -\frac{1}{a_1}\right)$ подинтегральные функции в формуле (4) принимают соответственно равные значения. Поэтому контур L можно заменить тремя замкнутыми контурами L_1, L_2, L_3 (рис. 1).

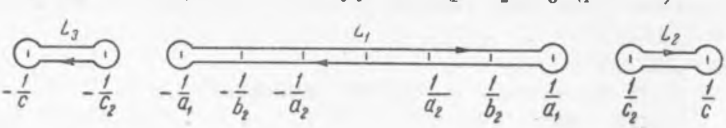

Рис. 1

Может быть показано, что в окрестности отрезка $\left(-\frac{1}{a_1}, +\frac{1}{a_1}\right)$ справедливо неравенство $|\xi| < 1$. Деформируем L_1 так, чтобы новый контур L_1' был расположен в указанной окрестности и в точках его было бы $|\xi| < 1$. При такой деформации мы пересекаем некоторую совокупность полюсов подинтегральной функции. Эти полюсы суть корни уравнений

$$t(1-g\theta)-(y+y_0)\sqrt{\frac{1}{a_2^2}-\theta^2}-2kH\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\theta^2}=0 \quad (k=1, 2, 3, \ldots).$$

Число комплексных корней этого уравнения, оказавшихся после деформации внутри L_1', неограниченно возрастает при $t\to\infty$. Изучение соответствующих вычетов требует довольно кропотливого исследования, в результате которого удается установить, что сумма этих вычетов имеет порядок $O\left(\frac{1}{t}\right)$. В точках деформированного контура L_1' справедлива формула (1). Можно показать, что при $|z-k|>\delta$ для достаточно большого $|z|$ осуществляется неравенство:

$$\left|\sum\frac{\xi^{k-1}}{z-k}\right|<\frac{\text{const}}{|z|}.$$

Так как при $t\to\infty$ имеем $|z|\to\infty$ и последнее неравенство выполняется равномерно относительно $\arg(z)$, то отсюда можно сделать вывод (при этом требуется еще выяснение некоторых деталей, на чем мы здесь не останавливаемся):

$$\int\limits_{L_1}\frac{(1-2b_2^2\theta^2)r}{\varkappa_1\varkappa_2(r+R)^2}\Omega\left(\frac{\tau-\varkappa_2(y+y_0)}{2\varkappa_1 H}, \xi\right)d\theta=O\left(\frac{1}{t}\right).$$

При изменении θ вдоль отрезка $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c}\right)$ или отрезка $\left(-\frac{1}{c}, -\frac{1}{c_2}\right)$ функция $\xi(\theta)$ изменяется от 1 до $+\infty$. Поэтому интеграл по L_2 может быть, при использовании соотношения (3), заменен суммой

$$-2\pi i\int\limits_{1/c_2}^{1/c}\frac{(1-2b_2^2\theta^2)^2r}{\varkappa_1\varkappa_2(r+R)^2}\xi^{z-1}d\theta+$$
$$+\oint\limits_{1/c_2}\frac{(1-2b_2^2\theta^2)^2r}{\varkappa_1\varkappa_2(r+R)^2}\Omega d\theta+\oint\limits_{1/c}\frac{(1-2b_2^2\theta^2)^2r}{\varkappa_1\varkappa_2(r+R)^2}\Omega d\theta.$$

Здесь символ $\oint$ обозначает интеграл по бесконечно малой окружности с центром в указанной точке. Пользуясь выражениями для функции Ω в окрестности точки $\xi=1$ и $\xi=\infty$, можно показать, что

$$\oint\limits_{1/c_2}=0, \qquad \oint\limits_{1/c}=\frac{A}{t\left(1-\frac{g}{c}\right)+B(y+y_0)}; \qquad A,\ B \text{ — постоянные.}$$

Порядок второго интеграла при $g\neq c$ есть $\frac{1}{t}$; если же $g=c$, то интеграл не зависит от t (и не равен нулю). В этом случае он и представляет незатухающую волну Релея. Изучение интеграла по отрезку $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c}\right)$ при больших значениях t сводится к вопросу о наличии на этом отрезке седловых точек функции $\exp\left\{\frac{1-g\theta}{\sqrt{\frac{1}{a_1^2}-\theta^2}}\ln\xi\right\}$, а этот последний вопрос — к вопросу о существовании корней уравнения

$$\frac{2\xi\ln\xi}{\xi^2-1}+\left(\frac{R'}{R}-\frac{r'}{r}\right)\frac{(1-g\theta)\left(\frac{1}{a_1^2}-\theta^2\right)}{\theta-\frac{g}{a_1^2}}=0 \tag{5}$$

на отрезке $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c}\right)$. Если уравнение (5) не имеет на нем корней, то порядок интеграла есть $\frac{1}{t}$; в противном случае порядок интеграла $\frac{1}{\sqrt{t}}$. Исследование показывает, что при $c_2 < g < a_1$ уравнение (5) не имеет корней; при $c < g < c_2$ имеет один корень (или нечетное их число). Можно показать также, что существует число c_0, удовлетворяющее неравенству $0 < c_0 < c$, такое, что при $c_0 < g < c$ уравнение (5) имеет четное число корней, а при $g < c_0$ корней не имеет.

Исследование интеграла по контуру L_3 производится аналогичным путем. Один из интегралов по окружности бесконечно малого радиуса равен нулю, а второй имеет теперь порядок $\frac{1}{t}$ при любом значении g. Уравнение (5) при $\theta < -\frac{1}{c_2}$ не имеет корней, ибо $\frac{2\xi \ln \xi}{\xi^2 - 1} < 1$, если $1 < \xi < +\infty$; с другой стороны, может быть доказано, что

$$\left(\frac{R'}{R} - \frac{r'}{r}\right)\frac{(1-g\theta)\left(\frac{1}{a_1^2} - \theta^2\right)}{\theta - \frac{g}{a_1^2}} \leqslant -1 \quad \text{при } \theta < -\frac{1}{c_2}. \tag{6}$$

Осталось изучить область значений g, когда $a_1 < g < a_2$. Без существенных изменений проводится исследование и в этом случае. Оказывается, что уравнение (5) не имеет теперь корней на отрезках $\left(\frac{1}{c_2}, \frac{1}{c}\right)$ и $\left(-\frac{1}{c}, -\frac{1}{c_2}\right)$, что опять-таки доказывается с помощью неравенства (6). Поэтому при $a_1 < g < a_2$ интеграл по контуру L имеет порядок $O\left(\frac{1}{t}\right)$.

Окончательные результаты можно формулировать следующим образом:

$$\varphi_2(gt, y, t) = \frac{A_1}{y + y_0} + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{при } g = c;$$

$$\varphi_2(gt, y, t) = A_2 K^{-C(y+y_0)} \frac{e^{Bit}}{\sqrt{t}} + O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{при } c < g < c_2, \quad c_0 < g < c;$$

$$\varphi_2(gt, y, t) = O\left(\frac{1}{t}\right) \qquad \text{при } 0 \leqslant g < c_0, \quad c_2 < g < a_2,$$

где $0 < c_0 < c$, а A_1, A_2, K, B, C — константы, причем $C > 0$, $1 < K$, B вещественно.

Исследование функций $\varphi_1(x, y, t)$ и $\psi_2(x, y, t)$ производится аналогичным путем.

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
1 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Н. В. Зволинский, ДАН, 59, № 6 (1948).