Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МЕХАНИКА

В. В. ДОБРОНРАВОВ

ОБ ОДНОМ СООТНОШЕНИИ В ЗАДАЧЕ ЭЙЛЕРА О ДВИЖЕНИИ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком А. И. Некрасовым 3 I 1949)

Обозначим неподвижную точку через O и отнесем тело к неподвижной системе $O\xi\eta\zeta$ прямоугольных осей координат и к подвижной системе $Oxyz$ осей, совпадающих с главными осями инерции тела для точки O. Направим ось $O\zeta$ по постоянному в случае Эйлера вектору **K** главного момента количества движения тела. Обозначая через $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ косинусы углов оси $O\zeta$ с осями $Oxyz$ и применяя углы Эйлера ψ, θ, φ, мы будем иметь:

$$\gamma_1 = \sin\theta\sin\varphi, \quad \gamma_2 = \sin\theta\cos\varphi, \quad \gamma_3 = \cos\theta.$$

Вводя обычные количества A, B, C, ω, p, q, r, из интеграла момента количества движения и интеграла живых сил получим:

$$Ap = K\gamma_1, \quad Bq = K\gamma_2, \quad Cr = K\gamma_3, \quad \omega_\zeta = \frac{2T}{K};$$

последнее соотношение принадлежит Лагранжу.

Подставляя в эти формулы углы Эйлера, найдем:

$$\begin{aligned}
&\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\sin\varphi + \frac{d\theta}{dt}\cos\varphi && = \frac{K}{A}\sin\theta\sin\varphi,\\
&\frac{d\psi}{dt}\sin\theta\cos\varphi - \frac{d\theta}{dt}\sin\varphi && = \frac{K}{B}\sin\theta\cos\varphi,\\
&\frac{d\psi}{dt}\cos\theta \qquad\qquad + \frac{d\varphi}{dt} && = \frac{K}{C}\cos\theta,\\
&\frac{d\psi}{dt} \qquad\qquad + \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta && = \frac{2T}{K}.
\end{aligned}$$

Так как эти четыре равенства, рассматриваемые как уравнения относительно трех производных, должны быть совместимы между собой, то должно быть:

$$\begin{vmatrix}
\sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & \frac{K}{A}\sin\theta\sin\varphi \\
\sin\theta\cos\varphi & -\sin\varphi & 0 & \frac{K}{B}\sin\theta\cos\varphi \\
\cos\theta & 0 & 1 & \frac{K}{C}\cos\theta \\
1 & 0 & \cos\theta & \frac{2T}{K}
\end{vmatrix} = 0$$

Раскрывая этот определитель по элементам последнего столбца, легко получим:

$$\frac{\sin^2\theta\sin^2\varphi}{A}+\frac{\sin^2\theta\cos^2\varphi}{B}+\frac{\cos^2\theta}{C}=\frac{2T}{K^2}. \tag{1}$$

Это и есть искомое соотношение. Пользуясь косинусами γ_1, γ_2, γ_3, найдем:

$$\frac{\gamma_1^2}{A}+\frac{\gamma_2^2}{B}+\frac{\gamma_3^2}{C}=\frac{2T}{K^2}, \qquad \gamma_1^2+\gamma_2^2+\gamma_3^2=1. \tag{2}$$

Рассмотрим точку $P(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$, которая лежит на постоянном векторе **K** на расстоянии единицы от точки O. Предположим, что $A>B>C$. Тогда мы получим:

$$\frac{2TA}{K^2}=\frac{A^2p^2+ABq^2+ACr^2}{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}>1,$$

$$\frac{2TC}{K^2}=\frac{ACp^2+BCq^2+C^2r^2}{A^2p^2+B^2q^2+C^2r^2}<1.$$

Таким образом, шар (2) пересекает эллипсоид (2). Следовательно, твердое тело в случае Эйлера движется вокруг неподвижной точки O так, что неподвижная точка P скользит вдоль сферической кривой, проведенной на гирационном эллипсоиде тела.

Если $A=B$, то из уравнения (1) следует, что угол θ будет постоянным; при этом гирационный эллипсоид будет эллипсоидом вращения, и предыдущая сферическая кривая обращается в окружность, окружающую малую ось. Равенства:

$$p^2+q^2+r^2=\omega^2,$$

$$Ap^2+Bq^2+Cr^2=2T,$$

$$A^2p^2+A^2q^2+C^2r^2=K^2$$

при $A=B$ можно рассмотреть, как три уравнения между двумя переменными p^2+q^2 и r^2; условие их совместимости будет:

$$AC\omega^2=2T(A+C)-K^2, \tag{3}$$

т. е. в этом случае угловая скорость ω должна быть постоянной. При $A=B$ мы имеем регулярную прецессию.

Применение гирационного эллипсоида для представления движения твердого тела было сделано впервые Мак-Куллахом.

Поступило
3 I 1949