Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 10 I 1949)

Дана система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

где $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots n)$ — аналитические функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в некоторой окрестности начала координат $O(x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0)$, равные нулю в точке O:

$$X_i(0, 0, \ldots, 0) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Система (1) эквивалентна системе

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}, \tag{2}$$

для которой точка O является особой точкой.

Возможны два случая.

1) Не все n^2 производных $\frac{\partial X_i}{\partial x_j}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ равны нулю в особой точке O.

Этот случай, начиная с Пуанкаре ([1]), был предметом исследований ряда ученых (([2], [3], [4]) и др.).

2) Все n^2 производных одновременно равны нулю. Этот случай особой точки высшего порядка представляет значительные трудности.

При $n = 2$ случай 2) рассмотрен Бендиксоном ([5]). Исследования характера особой точки высшего порядка при $n > 2$ почти не проводилось ([6]).

Мы рассмотрим случай 2) в предположении, что функции X_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеют следующие разложения в ряды Тейлора:

$$X_i = X_i^{(m)} + X_i^{(m+1)} + \ldots + X_i^{(j)} + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots n, \quad m \geqslant 2, \tag{3}$$

где $X_i^{(j)}$ — однородные полиномы степени j относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\frac{x_1}{X_1^{(m)}} = \frac{x_2}{X_2^{(m)}} = \ldots = \frac{x_n}{X_n^{(m)}} \tag{4}$$

и пусть $x_i = a_i \neq 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — вещественный корень уравнений (4) кратности 1, при этом предполагаем

$$X_i^{(m)}(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Определим числа p_{ij} $(i, j = 1, 2, \ldots, n-1)$ при помощи следующих формул*:

$$p_{ij} = \left| \begin{matrix} X_1^{(m)} & X_{i+1}^{(m)} \\ \dfrac{\partial X_1^{(m)}}{\partial x_{j+1}} & \dfrac{\partial X_{i+1}^{(m)}}{\partial x_{j+1}} \end{matrix} \right|_a, \quad i, j = 1, 2, \ldots, n-1;$$

$$p_{ii} + 1 = \left| \begin{matrix} X_1^{(m)} & X_{i+1}^{(m)} \\ \dfrac{\partial X_1^{(m)}}{\partial x_{i+1}} & \dfrac{\partial X_{i+1}^{(m)}}{\partial x_{i+1}} \end{matrix} \right|_a, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1; \tag{6}$$

$$p_{in} = \left| \begin{matrix} X_1^{(m)} & X_1^{(m+1)} \\ X_{i+1}^{(m)} & X_{i+1}^{(m+1)} \end{matrix} \right|_a \quad i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где знак a при определителях (6) означает, что элементы определителя вычислены при значении корня $x_i = a_i$ системы (4). Уравнение $(n-1)$-й степени относительно λ

$$D(\lambda) = \left| \begin{matrix} p_{11} - \lambda & p_{12} & \ldots & p_{1, n-1} \\ p_{21} & p_{22} - \lambda & \ldots & p_{2, n-1} \\ p_{n-1, 1} & p_{n-1, 2} & \ldots & p_{n-1, n-1} - \lambda \end{matrix} \right| = 0 \tag{7}$$

назовем **характеристическим уравнением** системы (1), его корни λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — **характеристическими корнями** системы (1).

Предполагаем, что вещественные части всех характеристических корней λ_j системы (1) отличны от нуля.

Теорема. *Если характеристическое уравнение системы (1) имеет $k-1$ корней с положительной вещественной частью и $n-k$ корней с отрицательной вещественной частью, то система (1) имеет две k-мерные 0-поверхности, примыкающие к особой точке О, соответственно, при $x_1 \to +0$ и $x_1 \to -0$.*

Доказательство. Произведем замену переменных

$$x_i = y_i t, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где y_i — функции параметра t такие, что для начальных условий y_i^0 имеем:

$$y_i^0 = y_i(0) = a_i \neq 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8'}$$

где a_i — корень системы (4).

Подставляя (8) в систему (2), будем иметь:

$$\frac{y_1 dt + t\,dy_1}{X_1^{(m)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + tX_1^{(m+1)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_1(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} =$$

$$= \frac{y_2 dt + t\,dy_2}{X_2^{(m)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + tX_2^{(m+1)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_2(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)} =$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= \frac{y_n dt + t\,dy_n}{X_n^{(m)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + tX_n^{(m+1)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_n(t, y_1, y_2, \ldots, y_n)}, \tag{9}$$

---

* Несимметрия определителей (6) относительно переменных происходит из-за того, что x_1 взято в дальнейшем за независимое переменное.

где для сокращения положено:

$$X_i(t, y_1, y_2, \ldots, y_n) = t^2 X_i^{(m+2)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + t^3 X_i^{(m+3)}(y_1, y_2, \ldots, y_n) + \ldots, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Система (9) при $t = 0$ для начальных значений y_i^0 дает следующие соотношения:

$$\frac{y_1^0}{X_1^{(m)}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)} = \frac{y_2^0}{X_2^{(m)}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)} = \ldots = \frac{y_n^0}{X_n^{(m)}(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0)}, \tag{10}$$

имеющие место в силу (8') и (4).

Беря за независимое переменное x_1, положим $y_1 = 1$. Тогда $dy_1 = 0$, $y_1 = y_1^0 = 1$. Полагаем $a_1 = 1$, что не ограничивает общности, так как, в силу (4), одно из чисел x_i можно взять произвольным.

Система (9) и уравнения (4) примут следующий вид:

$$\frac{dt}{X_1^{(m)}(1, y_2, \ldots, y_n) + tX_1^{(m+1)}(1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_1(t, 1, y_2, \ldots, y_n)} =$$

$$= \frac{y_2 dt + t\, dy_2}{X_2^{(m)}(1, y_2, \ldots, y_n) + tX_2^{(m+1)}(1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_2(t, 1, y_2, \ldots, y_n)} =$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$= \frac{y_n dt + t\, dy_n}{X_n^{(m)}(1, y_2, \ldots, y_n) + tX_n^{(m+1)}(1, y_2, \ldots, y_n) + \overline{X}_n(t, 1, y_2, \ldots, y_n)}, \tag{9'}$$

$$x_i = \frac{X_i^{(m)}(1, x_2, \ldots, x_n)}{X_1^{(m)}(1, x_2, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{4'}$$

Введем новые переменные z_i:

$$z_i = y_{i+1} - a_{i+1}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{11}$$

В силу (11) точке $y_i = a_i$ ($i = 2, 3, \ldots, n$) соответствует точка $z_i = 0$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$).

Система (9') в новых переменных z_j будет иметь форму:

$$a_{i+1} + z_i + t\frac{dz_i}{dt} =$$

$$= \frac{X_{i+1}^{(m)}(1, a_2 + z_1, \ldots, a_n + z_{n-1}) + tX_{i+1}^{(m+1)}(1, a_2 + z_1, \ldots, a_n + z_{n-1}) + \overline{X}_{i+1}}{X_1^{(m)}(1, a_2 + z_1, \ldots, a_n + z_{n-1}) + tX_1^{(m+1)}(1, a_2 + z_1, \ldots, a_n + z_{n-1}) + \overline{X}_1}, \tag{9''}$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Применяя формулу Тейлора к числителям и знаменателям правой части (9''), получим:

$$a_{i+1} + z_i + t\frac{dz_i}{dt} =$$

$$= \frac{X_{i+1}^{(m)}(1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial X_{i+1}^{(m)}}{\partial x_j}\right)_a z_{j-1} + X_{i+1}^{(m+1)}(1, a_2, \ldots, a_n)t + \overline{X}_{i+1}}{X_1^{(m)}(1, a_2, \ldots, a_n) + \sum_{j=2}^{n}\left(\frac{\partial X_1^{(m)}}{\partial x_j}\right)_a z_{j-1} + X_1^{(m+1)}(1, a_2, \ldots, a_n)t + \overline{X}_1},$$

$$i = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{12}$$

Производя деление и принимая во внимание (6), (4) и (12), система (12) будет иметь вид:

$$t\frac{dz_i}{dt} = p_{i1}z_1 + p_{i2}z_2 + \cdots + p_{in-1}z_{n-1} + p_{in}t + Z_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}),$$
$$i = 1, 2, \ldots, n-1, \qquad (13)$$

где $Z_i(t, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})$ — аналитические функции переменных t, z_1, $z_2, \ldots, z_{n-1}$, разложения которых в ряды Тейлора начинаются с членов 2-го измерения.

Поведение интегральных кривых системы (13) при $t \to 0$ нами изучено раньше ([6]).

Уравнение (7) является „укороченным" характеристическим уравнением системы (13), корни которого определяют поведение интегральных кривых при $t \to 0$. Легко видеть, что O-кривые системы (2) являются O-кривыми системы (13), и обратно. Этим и доказана теорема.

Следствие. *Если вещественные части характеристических корней имеют один и тот же знак, то в случае их положительности особая точка O системы (2) — узел; в случае их отрицательности существуют две O-кривые, примыкающие к O, соответственно, при $x_1 \to +0$ и $x_1 \to -0$.*

Геофизический институт
Академии наук СССР

Поступило
12 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Пуанкаре, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями, 1947, стр. 192—209. [2] А. М. Ляпунов, Общая задача об устойчивости движения, изд. 2, 1935. [3] И. Г. Петровский, Матем. сб., 41 (1). 48,107 (1934). [4] O. Perron, Math. Z., 28, 216, 383 (1928). [5] I. Bendixson, Acta Math., 24, 1 (1901). [6] А. А Шестаков, ДАН, 62, № 2 (1948).