Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Б. СТЕЧКИН

О ПОРЯДКЕ НАИЛУЧШИХ ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 4 I 1949)

В этой заметке формулируется ряд теорем о приближении периодических функций тригонометрическими многочленами, доказанных мною в (9).

1. Рассматриваются непрерывные функции f с периодом 2π и их приближения тригонометрическими многочленами. Через $t_n(x)$ обозначается тригонометрический многочлен порядка не выше n, а через $t_n^*(x)$ — тригонометрический многочлен, наименее уклоняющийся от f среди всех $t_n(x)$. Слегка отступая от обычных обозначений, мы полагаем

$$E_n[f] = \max_x \mid f - t_{n-1}^*(x) \mid \ (n = 1, 2, \ldots).$$

Введем несколько определений.

Определение 1. Пусть k — натуральное число. Будем говорить, что функция

$$\omega_k(\delta, f) \ (0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$$

есть модуль непрерывности k-го порядка функции f, если

$$\omega_k(\delta, f) = \max_{|h| \leqslant \delta} \max_x \mid \Delta_h^k f(x) \mid,$$

где $\Delta_h^k f(x)$ — конечная разность функции f k-го порядка с шагом h:

$$\Delta_h^k f(x) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} f(x + ih).$$

Аналогичное понятие уже вводилось ранее С. Н. Бернштейном (1) и А. Зигмундом (2).

Определение 2. Зафиксируем натуральное число k, и пусть функция $\omega(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ удовлетворяет условиям:

1) $\omega(\delta)$ не убывает;
2) $\omega(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$;
3) $\omega(\delta) \geqslant C_1 \delta^k > 0$ $(\delta > 0)$.

Будем говорить, что функция f принадлежит классу $H_k[\omega]$ и писать $f \in H_k[\omega]$, если найдется такая константа $C_2 > 0$, что

$$\omega_k(\delta, f) \leqslant C_2 \omega(\delta) \ (0 \leqslant \delta \leqslant \pi).$$

Вместо $H_k[\delta^\alpha]$ $(0 < \alpha \leqslant k)$ будем писать просто H_k^α.

Если для последовательности функций $\{f_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$

$$\omega_k(\delta, f_n) \leqslant C_2 \omega(\delta) \quad (0 \leqslant \delta \leqslant \pi,\ n = 1, 2, \ldots),$$

где C_2 не зависит от n, то будем писать: $f_n \in H_k[\omega]$ равномерно относительно n.

Понятие классов $H_k[\omega]$ является естественным обобщением классов Липшица и классов функций, имеющих ограниченную r-ю производную.

Определение 3. Зафиксируем число $\alpha > 0$. Будем говорить, что функция $\varphi(\delta)$ $(0 \leqslant \delta \leqslant \pi)$ принадлежит нормальному классу степени α и писать $\varphi \in N^\alpha$, если $\varphi(\delta)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\varphi(\delta) > 0$ $(0 < \delta \leqslant \pi)$;

2) $\varphi(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$, $\varphi(0) = 0$;

3) $\varphi(\delta)$ не убывает;

4) существует такая константа $C_3 > 0$, что для $0 < \delta < \eta \leqslant \pi$

$$\eta^{-\alpha} \varphi(\eta) \leqslant C_3 \delta^{-\alpha} \varphi(\delta).$$

Определение 4. Будем говорить, что функция $\psi(t)$ имеет порядок $\varphi(t)$ и писать $\psi(t) \sim \varphi(t)$, если найдутся две положительные константы C_4 и C_5 такие, что для всех t, для которых определены функции φ и ψ,

$$C_4 \varphi(t) \leqslant \psi(t) \leqslant C_5 \varphi(t).$$

2. Задача, которой мы занимаемся, формулируется следующим образом: при каких ограничениях на непрерывную периодическую функцию $f(x)$ ее наилучшие приближения $E_n[f]$ тригонометрическими многочленами имеют заданный порядок $\varphi(n^{-1})$? При рассмотрении этой задачи мы ограничиваемся тем случаем, когда $\varphi(\delta) \in N^\alpha$ для некоторого $\alpha > 0$.

Постановка этой задачи восходит к Валле-Пуссену (1903 г.). С. Н. Бернштейн (1) и Д. Джексон (3) получили зависимости между оценками сверху для $E_n[f]$ и дифференциальными свойствами f. Некоторые дополнения к их теоремам доказаны А. Зигмундом (2) и Валле-Пуссеном (4). Нам предстоит поэтому получить зависимости между дифференциальными свойствами f и оценками $E_n[f]$ снизу.

Необходимо еще отметить, что для ряда функций F известны асимптотические формулы для наилучших приближений. Впервые такую формулу доказал С. Н. Бернштейн (5).

Наш основной результат формулируется следующим образом:

Основная теорема. *Пусть $\varphi \in N^\alpha$. Чтобы*

$$E_n[f] \sim \varphi(n^{-1}),$$

необходимо, чтобы для любого $k > \alpha$, и достаточно, чтобы для некоторого $k > \alpha$

$$\omega_k(\delta, f) \sim \varphi(\delta).$$

3. В этом пункте мы сформулируем ряд теорем о наилучших приближениях, большинство которых используется при доказательстве основной теоремы.

Теорема 1.

$$E_n[f] \leqslant C_{k+r} n^{-r} \omega_k(n^{-1}, f^{(r)}) \quad (r = 0, 1, \ldots;\ n = 1, 2, \ldots;\ k = 1, 2, \ldots).$$

Здесь $f^{(r)}(x)$ — r-я производная функции f. Частные случаи см. (3, 2, 7).

Теорема 2. *Чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$t_n^* \in H_k[\omega]$$

равномерно относительно n.

Теорема 3. *Чтобы $f \in H_k^k$, необходимо и достаточно выполнение условия* $(t_n^*)^{(k)} = O(1)$.

Теорема 4. *Пусть k — натуральное число и*

$$E_{n+1}[f] \leqslant C_6\omega(n^{-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Чтобы $f \in H_k[\omega]$, необходимо и достаточно выполнение условия

$$(t_n^*)^{(k)} = O(n^k\omega(n^{-1})).$$

Теорема 5. *Пусть k — натуральное число, $0 < \alpha < k$, и $\varphi \in N^\alpha$. Чтобы $f \in H_k[\varphi]$, необходимо и достаточно выполнение условия*

$$E_n[f] = O(\varphi(n^{-1})).$$

Частные случае см. ([1,4,7]).

Теорема 6. *Пусть $0 \leqslant \alpha < \beta < k$ и*

$$0 < C_7\delta^\beta \leqslant \omega_k(\delta, f) \leqslant C_8\delta^\alpha.$$

Тогда

$$E_n[f] \geqslant C_9 n^{-\frac{\beta(k-\alpha)}{k-\beta}} > 0.$$

Частный случай $\alpha = 0$ установлен С. Н. Бернштейном ([1]).

4. Отметим в заключение, что при доказательстве основной теоремы и ряда теорем n°3 мы существенным образом используем одно обобщение неравенства С. Н. Бернштейна для производных от тригонометрического многочлена, опубликованное нами ранее ([6]).

Заметим также, что все сформулированные нами теоремы без изменений переносятся на приближения в метрике L^p, а в силу результатов С. Н. Бернштейна ([7, 9]), также и на приближения целыми функциями конечной степени.

Все теоремы настоящей заметки были получены мною в результате занятий на семинаре по теории приближений в АН СССР, и я приношу глубокую благодарность руководителю семинара акад. С. Н. Бернштейну за внимание к моей работе и ценные замечания.

Математический институт
им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
2 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, Сообщ. Харьковск. матем. об-ва, (2) (1912). [2] A. Zygmund, Duke Math. J., 12 (1945). [3] D. Jackson, Ueber die Genauigkeit der Annäherung..., Diss., Göttingen, 1912. [4] Ch. de la Vallée Poussin, Leçons sur l'approximation des fonctions..., Paris, 1919. [5] S. Bernstein, Acta Math. (1913). [6] С. Б. Стечкин, ДАН, 60, № 9 (1948). [7] С. Н. Бернштейн, ДАН, 57, № 2 (1947). [8] С. Н. Бернштейн, ДАН, 60, № 9 (1948). [9] С. Б. Стечкин, О порядке наилучших приближений непрерывных функций, Кандидатская диссертация, МГУ, 1948.