Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ЕДИНСТВЕННОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком С. Н. Бернштейном 20 I 1949)

Мы будем рассматривать выпуклые поверхности в n-мерном евклидовом пространстве E^n. Под выпуклой поверхностью в E^n мы понимаем связное открытое множество на границе выпуклого тела с внутренними точками; границу бесконечного выпуклого тела будем называть бесконечной выпуклой поверхностью.

Пусть F_1 и F_2 — две выпуклые поверхности в E^n, имеющие общую точку P; $h_1(\mathbf{n})$ и $h_2(\mathbf{n})$ — значения опорных функций поверхностей на единичной сфере, если за начало координат принять точку P.

Мы скажем, что поверхности F_1 и F_2 касаются в точке P сильно внутренним образом, если существует единичный вектор $\mathbf{n}_0$ такой, что

$$h_1(\mathbf{n}_0) = h_2(\mathbf{n}_0) = 0,$$

а для всех $\mathbf{n}$, достаточно близких $\mathbf{n}_0$, выполняется неравенство

$$|h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})| > c\,|\mathbf{n} - \mathbf{n}_0|^2,$$

где c — постоянная больше нуля*.

Мы будем говорить, что выпуклые поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание, если одну из них параллельным переносом можно так расположить относительно другой, чтобы в некоторой их общей точке P они касались сильно внутренним образом.

Теорема 1. *Пусть F_1 и F_2 — бесконечные выпуклые поверхности в E^n, имеющие одно и то же сферическое изображение ω, которое вместе с границей расположено на единичной полусфере $x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = 1$, $x_n > 0$.*

Если значения опорных функций поверхностей F_1 и F_2 на границе ω совпадают, то либо поверхности совпадают, либо они допускают сильное внутреннее касание.

Доказательство. Обозначим $h_1(\mathbf{n})$ и $h_2(\mathbf{n})$ значения опорных функций поверхностей F_1 и F_2 для единичных векторов $\mathbf{n}$, концы которых принадлежат ω.

Если $h_1(\mathbf{n}) = h_2(\mathbf{n})$ для всех $\mathbf{n}$ из ω, то поверхности F_1 и F_2 совпадают. Если же поверхности не совпадают, то найдется вектор $\mathbf{n}_0$ такой, что $h_1(\mathbf{n}_0) \neq h_2(\mathbf{n}_0)$, пусть, для определенности, $h_1(\mathbf{n}_0) > h_2(\mathbf{n}_0)$.

---

* Геометрический смысл сильного внутреннего касания поверхностей в точке P состоит в том, что достаточно малая окрестность точки P одной из поверхностей содержится существенно внутри другой поверхности.

Обозначим $\bar{\omega}$ максимальную связную область на единичной сфере содержащую $\mathbf{n}_0$, в которой $h_1(\mathbf{n}) > h_2(\mathbf{n})$.

Введем в рассмотрение вектор-функцию $\varphi(\mathbf{n})$, определенную в области $\bar{\omega}$ равенством:

$$r = \varphi(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n}}{h_1(\mathbf{n}) - h_2(\mathbf{n})}.$$

Интерпретируя эту функцию геометрически, получим некоторое $n-1$-мерное многообразие Φ в E^n. При достаточно малом k многообразие Φ расположено внутри конуса V $x_n^2 = k(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2)$, $x_n > 0$, вне шара радиуса $\inf \frac{1}{h_1(\mathbf{n})}$.

Рассечем многообразие Φ плоскостью $x_n = c$ и ту часть его, которая лежит со стороны $x_n < c$, обозначим $\bar{\Phi}$. Сместим параболоид $x_n = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_{n-1}^2$ в сторону $x_n < 0$ на столько, чтобы часть конуса V, расположенная со стороны $x_n < c$, была внутри параболоида.

Теперь будем аффинно «прижимать» параболоид к плоскости $x_n = c$. В некоторый момент параболоид коснется многообразия $\bar{\Phi}$ в некоторой точке X_0.

Проведем в этой точке касательную плоскость π к параболоиду. Она, очевидно, будет опорной плоскостью для $\bar{\Phi}$. Плоскость π не проходит через начало координат. Пусть $\mathbf{r} = \psi(\mathbf{n}) = \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{a}\mathbf{n}}$, где $\mathbf{a}$ — некоторый вектор, уравнение плоскости π.

Если обозначить $\mathbf{n}_0$ единичный вектор, направленный в точку X_0, то для всех $\mathbf{n}$, достаточно близких к $\mathbf{n}_0$, выполняется неравенство

$$|\varphi(\mathbf{n}) - \psi(\mathbf{n})| \geqslant c_n |\mathbf{n} - \mathbf{n}_0|^2, \qquad (*)$$

где c_1 — постоянная больше нуля, и равенство достигается при $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$.

Подставляя в неравенство $(*)$ значения функций $\varphi(\mathbf{n})$ и $\psi(\mathbf{n})$ и замечая, что $h_1(\mathbf{n}_0) - h_2(\mathbf{n}_0) \neq 0$ и $\mathbf{a}\mathbf{n}_0 \neq 0$, приходим к неравенству

$$|\mathbf{a}\mathbf{n} + h_2(\mathbf{n}) - h_1(\mathbf{n})| \geqslant c_2 |\mathbf{n} - \mathbf{n}_0|^2, \qquad (**)$$

в котором равенство при $\mathbf{n} = \mathbf{n}_0$ достигается.

Сместим поверхность F_1 параллельно себе на вектор $\mathbf{a}$, тогда опорная функция ее будет $h_1'(\mathbf{n}) = h_1(\mathbf{n}) - \mathbf{a}\mathbf{n}$, и неравенство $(**)$ дает

$$|h_2(\mathbf{n}) - h_1'(\mathbf{n})| \geqslant c_2 |\mathbf{n} - \mathbf{n}_0|^2.$$

Но это значит, что поверхности F_1 и F_2 допускают сильное внутреннее касание.

Теорема 1 доказана.

Пусть $\pi(\mathbf{n})$ — опорная плоскость тела K, частью границы которого является поверхность F. Проведем плоскость $\pi_\delta(\mathbf{n})$, параллельную $\pi(\mathbf{n})$, на расстоянии δ от нее так, чтобы она пересекала тело K (δ достаточно мало). Пусть $D_\delta(\mathbf{n})$ — пересечение тела K с плоскостью $\pi_\delta(\mathbf{n})$.

Предел последовательности тел $\frac{1}{\sqrt{2\delta}} D_\delta(\mathbf{n})$ при $\delta \to 0$, есла он существует, называется индикатрисой Дюпена поверхности F в направлении $\mathbf{n}$.

Теорема 2. *Пусть F_1 и F_2 — две бесконечные регулярные поверхности в E^n, удовлетворяющие условиям:*

а) *обе поверхности имеют одно и то же сферическое изображение ω, расположенное вместе с границей на одной полусфере;*

б) *опорные функции поверхностей F_1 и F_2 на границе области ω конечны и равны;*

в) *индикатрисы Дюпена одинаковых направлений либо равны, либо одну из них нельзя поместить внутрь другой параллельным переносом.*

Тогда поверхности F_1 и F_2 совпадают.

Теорема 2 следует из теоремы 1.

Теорема 3. *Пусть $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \mathbf{n})$ — произвольная функция единичного вектора $\mathbf{n}$ и численных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, определенная для $\mathbf{n}$ из ω и $0 \leqslant \alpha_1 \leqslant \alpha_2 \leqslant \ldots \leqslant \alpha_{n-1}$, удовлетворяющая условию: если $\Phi(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}, \mathbf{n}) = \Phi(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}, \mathbf{n})$, то либо $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \beta_{n-1}$, либо в ряду величин $\alpha_1 - \beta_1$, $\alpha_2 - \beta_2, \ldots, \alpha_{n-1} - \beta_{n-1}$ есть хотя бы одна перемена знака.*

Если сферическое изображение ω бесконечной регулярной поверхности F можно расположить вместе с границей на одной полусфере, то эта поверхность определяется однозначно заданием ее опорной функции на границе ω и значений $\varphi(\mathbf{n})$ функции $\Phi(R_1, R_2, \ldots, R_{n-1}, \mathbf{n})$ внутри ω, где $R_1, R_2 \ldots, R_{n-1}$ — главные радиусы кривизны поверхности F, расположенные в порядке возрастания.

В частности, бесконечная выпуклая поверхность в E^n определяется однозначно заданием опорной функции на границе ω ее сферического изображения и значениями любой элементарной симметрической функции главных радиусов кривизны в функции нормали к поверхности.

Теорема 3 следует из теоремы 2.

Поступило
20 I 1949