Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

П. И. ПЕТРОВ

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ИНВАРИАНТЫ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ СИММЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 18 I 1949)

В данной работе решается проблема построения наипростейшего базиса полной системы аффинно-скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка двумерного обобщенного пространства симметрической аффинной связности.

1. Предварительно поставим целью дать решение следующей подготовительной задачи: построить в бинарной области наипростейший базис полной системы совместных алгебраических инвариантов двух тензоров $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta\gamma}$. Сначала находим инварианты каждого из указанных тензоров в отдельности, затем их совместные инварианты.

Скаляры

$$\varphi_1 = \psi_{[\alpha\beta]} e^{\alpha\beta}, \qquad \varphi_2 = | \psi_{(\alpha\beta)} | ,$$

где $e^{\alpha\beta}$ задан при помощи матрицы второго порядка $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}$, являются наинизшими целыми рациональными инвариантами первоначального тензора $\psi_{\alpha\beta}$.

Прежде чем приступить к составлению скалярных инвариантов трехвалентного тензора $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ общей структуры, разложим его на неприводимые части. В качестве неприводимых частей будем иметь два вектора p^α, q^β и тензор $C_{(\alpha\beta\gamma)} = C_{\alpha\beta\gamma}$.

Обратимся теперь к нахождению наинизших совокупных скалярных инвариантов последних тензоров в бинарной области.

Функционально независимые скаляры

$$\psi_2 = p^\alpha q_\alpha, \quad \psi_3 = C_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta p^\gamma, \quad \psi_4 = C_{\alpha\beta\gamma} q^\alpha q^\beta q^\gamma, \quad \psi_5 = C_{\alpha\beta\gamma} p^\alpha p^\beta q^\gamma,$$

где p^α, q^β, $C_{\alpha\beta\gamma}$ — вышеупомянутые независимые линейные комитанты тензора $\psi_{\alpha\beta\gamma}$, вместе с дискриминантом (1) бинарной кубической формы ψ_1 образуют базис полной системы наинизших инвариантов тензора $\psi_{\alpha\beta\gamma}$. Два тензора $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta\gamma}$ в области двух переменных не имеют совместного целого рационального инварианта второй степени. Отсюда следует, что функции

$$\omega_1 = a_{\lambda\mu} p^\lambda p^\mu, \quad \omega_2 = a_{\lambda\mu} q^\lambda q^\mu, \quad \text{где } a_{\lambda\mu} = \psi_{(\lambda\mu)},$$

являются надлежащей к определению парой совместных наинизших инвариантов $\psi_{\alpha\beta}$, $\psi_{\alpha\beta\gamma}$.

Инварианты $\varphi_1 \ldots \varphi_2 \psi_1 \ldots \psi_5 \omega_1 \ldots \omega_2$ функционально независимы. Это положение доказывается путем исследования ранга якобиевой матрицы перечисленных здесь функций.

2. Геометрия многообразия двух измерений имеет целый ряд особенностей. Одна из них выражается следующей теоремой.

Лемма 1. *Тензор кривизны* $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ ([2], стр. 40) *двумерного обобщенного пространства симметрической аффинной связности всегда можно представить формулой*

$$-\frac{1}{2}B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}=\delta^{\alpha}_{[\gamma}\psi_{|\beta|\delta]}+\delta^{\alpha}_{\beta}\psi_{[\gamma\delta]}.$$

Отсюда видно, что $B^{\alpha}_{\beta\gamma\delta\,,\varepsilon}$, $\psi_{\alpha\beta,\gamma}$ — первые расширения тензора аффинной кривизны двумерного пространства, тензора $\psi_{\alpha\beta}$, соответственно, выражаются друг через друга линейно однородно с постоянными коэффициентами.

3. Найденные в §§ 1, 2 результаты и определение ([2], стр. 35) скалярных дифференциальных инвариантов обобщенного пространства симметрической аффинной связности с помощью теорем замены и приведения во второй ее форме дают теорему, составляющую основную цель настоящей статьи.

Теорема. *Скаляры* $\varphi_1\ldots\varphi_2\psi_1\ldots\psi_5\,\omega_1\ldots\omega_2$ *образуют наипростейший базис полной системы аффинно-скалярных дифференциальных инвариантов второго порядка двумерного обобщенного пространства симметрической аффинной связности.*

4. Под проективно-евклидовым пространством разумеется пространство симметрической аффинной связности, допускающее отображение в евклидово с сохранением геодезических линий.

Из приведенного здесь определения легко получаются вспомогательные теоремы.

Лемма 2. *Чтобы двумерное пространство было проективно-евклидовым, необходимо и достаточно условие:*

$$\psi_{\alpha[\beta,\gamma]}=0.$$

Лемма 3. *Необходимым и достаточным условием того, что двумерное пространство проективно-евклидово, является равенство*

$$p^{\alpha}+q^{\alpha}=0.$$

В качестве примера применения аффинно-скалярных дифференциальных инвариантов имеем такую теорему проективной геометрии путей.

Теорема. *Двумерное обобщенное пространство симметрической аффинной связности тогда и только тогда проективно-евклидово, если его дифференциальные инварианты* ψ_2, ψ_3, ψ_4 *удовлетворяют условиям:*

$$\psi_2=0,\qquad \psi_3+\psi_4=0.$$

Научно-исследовательский институт
математики и механики им. Н. Г. Чеботарева
Казанского государственного университета
им. В. И. Ульянова-Ленина

Поступило
5 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. Clebsch, Leçons sur la géométrie, 2, 1879, p. 272. [2] T. Y. Thomas, The Differential Invariants of Generalized Spaces, 1934.