

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СУММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1949)

В этой работе используются формулы кратного суммирования для отыскания численных значений интеграла дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-2)}), \quad (1)$$

определяемого следующими начальными условиями в точке $x = a$ промежутка (a, X) :

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}.$$

Предполагается, что существование искомого интеграла предварительно установлено.

С целью сокращения записи условимся писать $y_i^{(k)}$ вместо $y^{(k)}(a + ih)$, где i принимает значения $0, 1, 2, \dots$. Обозначим $\mu + 1$ -ю сумму, полученную от суммирования значений $y_i^{(n)}$ ($i = 0, 1, \dots, r - \mu$), через

$$\sum_{v=0}^{\mu+1} y_{r+1}^{(n)} = \sum_{v=0}^{r-\mu} \binom{r-v}{\mu} y_v^{(n)}.$$

Составим таблицу сумм (см. табл. 1, стр. 126).

Числа, лежащие в этой таблице в одной и той же нисходящей строке, содержащей $y_0^{(n)}$, все равны $y_0^{(n)}$. Сумма $\sum^m y_i^{(n)}$ получается путем сложения сумм $\sum^m y_{i-1}^{(n)}$ и $\sum^{m-1} y_{i-1}^{(n)}$.

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и формулу трапеции (замкнутого типа), мы находим:

$$y_r^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(rh)^\lambda}{\lambda!} y_0^{(k+\lambda)} - \frac{1}{2} \frac{r^{n-k-1} h^{n-k}}{(n-k-1)!} y_0^{(n)} + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} M_{n-k-1, r} + R_{r, k}, \quad (2)$$

где

$$M_{n-k-1, r} = \sum_{v=0}^{r-1} (r-v)^{n-k-1} y_v^{(n)} \quad (3)$$

Таблица 1

x	$y^{(n)}(x)$	Σ	Σ^2	Σ^3	Σ^4
a	$y_0^{(n)}$				
$a+h$	$y_1^{(n)}$	$\Sigma y_1^{(n)}$	$\Sigma^2 y_2^{(n)}$		
$a+2h$	$y_2^{(n)}$	$\Sigma y_2^{(n)}$	$\Sigma^2 y_3^{(n)}$	$\Sigma^3 y_3^{(n)}$	$\Sigma^4 y_4^{(n)}$
$a+3h$	$y_3^{(n)}$	$\Sigma y_3^{(n)}$		$\Sigma^3 y_4^{(n)}$	$\Sigma^4 y_5^{(n)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$a+(r-2)h$	$y_{r-2}^{(n)}$				$\Sigma^4 y_r^{(n)}$
$a+(r-1)h$	$y_{r-1}^{(n)}$	$\Sigma y_{r-1}^{(n)}$	$\Sigma^2 y_r^{(n)}$	$\Sigma^3 y_r^{(n)}$	$\Sigma^4 y_{r+1}^{(n)}$
$a+rh$	$y_r^{(n)}$	$\Sigma y_r^{(n)}$	$\Sigma^2 y_{r+1}^{(n)}$	$\Sigma^3 y_{r+1}^{(n)}$	

момент $(n-k-1)$ -го порядка функции $(r-t)^{n-k-1} y^{(n)}(a+th)$ относительно точки r , а

$$R_{r,k} = -\frac{r h^{n-k}}{12(n-k-1)!} [(r-t)^{n-k-1} y^{(n)}(a+th)]''_{t=\xi} \quad (0 < \xi < r)$$

остаточный член. Под $y(x)$ мы подразумеваем однозначную функцию, непрерывную вместе со своими первыми $n+2$ производными в промежутке $(a \leq x \leq X)$.

Разложим $(r-v)^{n-k-1}$ с помощью интерполяционной формулы Ньютона с нисходящими разностями:

$$(r-v)^{n-k-1} = \sum_{\mu=1}^{n-k-1} \binom{r-v}{\mu} \Delta^{\mu} O^{n-k-1} \quad (k=0, 1, \dots, n-2),$$

где символ $\Delta^{\mu} O^{n-k-1}$ обозначает числовое значение μ -й разности от x^{n-k-1} при x , равном нулю.

Подставив это разложение в формулу (3) и изменив порядок суммирования, получим:

$$M_{n-k-1, r} = \sum_{\mu=1}^{n-k-1} \Delta^{\mu} O^{n-k-1} \sum_{\nu=1}^{\mu+1} y_{r+\nu}^{(n)}.$$

Ниже приводится ряд соотношений между моментами и суммами различных порядков для $n-k-1=1, 2, 3$ и 4.

$$M_{1,r} = \sum y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{2,r} = \sum y_{r+1}^{(n)} + 2 \sum y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{3,r} = \sum y_{r+1}^{(n)} + 6 \sum y_{r+1}^{(n)} + 6 \sum y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{4,r} = \sum y_{r+1}^{(n)} + 14 \sum y_{r+1}^{(n)} + 36 \sum y_{r+1}^{(n)} + 24 \sum y_{r+1}^{(n)}.$$

Задача состоит в определении $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)} \dots$ по заданным значениям $y_0^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$).

Отбрасывая в формуле (2) остаточный член и полагая $r = 1$, мы получим числа $y_1^{(k)}$. Далее из уравнения (1) получаем значение $y_1^{(n)}$. При помощи $y_1^{(n)}$ заполняем в таблице сумм наклонную восходящую строку, выходящую из $y_2^{(n)}$. Затем, полагая $r = 2$ в формуле (2) (без остаточного члена), вычисляем числа $y_2^{(k)}$ ($k = 0, 1, \dots, n-2$). После из уравнения (1) вычисляем $y_2^{(n)}$ и заполняем в таблице сумм наклонную восходящую строку, выходящую из $y_3^{(n)}$.

Остальные значения $y_v^{(k)}$ ($v = 3, 4, \dots, r$) вычисляются по таблице сумм $y_v^{(n)}$ при помощи формулы (2), причем соответствующие числа $y_v^{(n)}$ даются уравнением (1).

Этот метод может быть рекомендован и в тех случаях, когда правая часть (1) содержит $y^{(n-1)}$. Значение $y_1^{(n-1)}$, нужное для интегрирования, может быть вычислено последовательными приближениями. Значения же $y_v^{(n-1)}$ ($v = 2, 3, \dots$) могут быть легко получены с помощью формулы трапеции (незамкнутого типа). Но можно выполнить интегрирование и не прибегая к последовательным приближениям. Для этого достаточно использовать уравнение, содержащее $y^{(n-1)}$, и то, которое получится из него дифференцированием.

В качестве примера будем искать характеристические числа для дифференциального уравнения

$$y'' = -\lambda f(x) y(x)$$

при граничных условиях: $y(0) = 0, y(1) = 0$. Функцию $f(x)$ будем считать имеющей непрерывную производную второго порядка в промежутке $(0, 1)$.

Уравнение (2), из которого определяются все y_v с точностью до множителя $y'(0)$, после несложных преобразований, при $y'(0) = 1$ приводится к виду:

$$y_r = rh - \lambda h^2 \sum_{v=1}^{r-1} (r-v) f_v y_v.$$

Таким образом определение характеристических чисел сводится к разысканию лишь $y_1, y_2, \dots, y_r$. Приравняв нулю y_r ($r > 1$), мы получим уравнение для определения λ .

Вычисление показывает, что

$$y_1 = h,$$

$$y_2 = 2h - \lambda h^3 f_1,$$

$$y_3 = 3h - 2\lambda h^3 (f_1 + f_2) + \lambda^2 h^5 f_1 f_2,$$

и т. д.

При $h = \frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ для определения λ будем иметь соответственно уравнения: $y_2 = 0$, $y_3 = 0$.

В частности, при $f(x) = x$ и $h = \frac{1}{5}$ мы убеждаемся, что λ должно быть корнем уравнения

$$196608\lambda^4 - 1024 \cdot 10^5 \lambda^3 + 15616 \cdot 10^6 \lambda^2 - 8 \cdot 10^{11} \lambda + 10^{13} = 0.$$

Результат вычислений показывает, что наименьшее значение λ равно 18,25 (точное же значение λ есть 18,96). Для определения значений функции $y(x)$ в точках деления остается подставить это значение λ в выражения для y_2, y_3 и y_4 . Таким образом деление промежутка $(0, 1)$ на 5 равных частей приводит к приближенному значению λ с ошибкой, не превосходящей 3,7%. Такая точность совершенно достаточна для многих приложений.

Поступило
29 XII 1948