Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Ш. Е. МИКЕЛАДЗЕ

ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ФОРМУЛ СУММИРОВАНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 14 I 1949)

В этой работе используются формулы кратного суммирования для отыскания численных значений интеграла дифференциального уравнения

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-2)}), \tag{1}$$

определяемого следующими начальными условиями в точке $x = a$ промежутка (a, X):

$$y(a) = y_0, \quad y'(a) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(a) = y_0^{(n-1)}.$$

Предполагается, что существование искомого интеграла предварительно установлено.

С целью сокращения записи условимся писать $y_i^{(k)}$ вместо $y^{(k)}(a + ih)$, где i принимает значения $0, 1, 2, \ldots$ Обозначим $\mu + 1$-ю сумму, полученную от суммирования значений $y_i^{(n)}$ $(i = 0, 1, \ldots, r - \mu)$, через

$$\sum^{\mu+1} y_{r+1}^{(n)} = \sum_{\nu=0}^{r-\mu} \binom{r-\nu}{\mu} y_\nu^{(n)}.$$

Составим таблицу сумм (см. табл. 1, стр. 126).

Числа, лежащие в этой таблице в одной и той же нисходящей строке, содержащей $y_0^{(n)}$, все равны $y_0^{(n)}$. Сумма $\sum^m y_i^{(n)}$ получается путем сложения сумм $\sum^m y_{i-1}^{(n)}$ и $\sum^{m-1} y_{i-1}^{(n)}$.

Используя формулу Тейлора с остаточным членом в интегральной форме и формулу трапеции (замкнутого типа), мы находим:

$$y_r^{(k)} = \sum_{\lambda=0}^{n-k-1} \frac{(rh)^\lambda}{\lambda!} y_0^{(k+\lambda)} - \frac{1}{2} \frac{r^{n-k-1} h^{n-k}}{(n-k-1)!} y_0^{(n)} + \frac{h^{n-k}}{(n-k-1)!} M_{n-k-1, r} + R_{r, k}, \tag{2}$$

где

$$M_{n-k-1, r} = \sum_{\nu=0}^{r-1} (r-\nu)^{n-k-1} y_\nu^{(n)} \tag{3}$$

Таблица 1

x	$y^{(n)}(x)$	$\sum$	$\sum^2$	$\sum^3$	$\sum^4$
a	$y_0^{(n)}$				
		$\sum y_1^{(n)}$			
$a+h$	$y_1^{(n)}$		$\sum^2 y_2^{(n)}$		
		$\sum y_2^{(n)}$		$\sum^3 y_3^{(n)}$	
$a+2h$	$y_2^{(n)}$		$\sum^2 y_3^{(n)}$		$\sum^4 y_4^{(n)}$
		$\sum y_3^{(n)}$		$\sum^3 y_4^{(n)}$	
$a+3h$	$y_3^{(n)}$				$\sum^4 y_5^{(n)}$
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.
$a+(r-2)h$	$y_{r-2}^{(n)}$				$\sum^4 y_r^{(n)}$
		$\sum y_{r-1}^{(n)}$		$\sum^3 y_r^{(n)}$	
$a+(r-1)h$	$y_{r-1}^{(n)}$		$\sum^2 y_r^{(n)}$		$\sum^4 y_{r+1}^{(n)}$
		$\sum y_r^{(n)}$		$\sum^3 y_{r+1}^{(n)}$	
$a+rh$	$y_r^{(n)}$		$\sum^2 y_{r+1}^{(n)}$		

момент $(n-k-1)$-го порядка функции $(r-t)^{n-k-1}\, y^{(n)}(a+th)$ относительно точки r, а

$$R_{r,k} = -\frac{rh^{n-k}}{12\,(n-k-1)!}\left[(r-t)^{n-k-1}\, y^{(n)}(a+th)\right]''_{t=\xi} \quad (0<\xi<r)$$

остаточный член. Под $y(x)$ мы подразумеваем однозначную функцию, непрерывную вместе со своими первыми $n+2$ производными в промежутке $(a \leqslant x \leqslant X)$.

Разложим $(r-\nu)^{n-k-1}$ с помощью интерполяционной формулы Ньютона с нисходящими разностями:

$$(r-\nu)^{n-k-1} = \sum_{\mu=1}^{n-k-1} \binom{r-\nu}{\mu} \Delta^{\mu} O^{n-k-1} \qquad (k=0, 1, \ldots, n-2),$$

где символ $\Delta^{\mu} O^{n-k-1}$ обозначает числовое значение μ-й разности от x^{n-k-1} при x, равном нулю.

Подставив это разложение в формулу (3) и изменив порядок суммирования, получим:

$$M_{n-k-1,\, r} = \sum_{\mu=1}^{n-k-1} \Delta^{\mu} O^{n-k-1} \sum^{\mu+1} y_{r+1}^{(n)}.$$

Ниже приводится ряд соотношений между моментами и суммами различных порядков для $n-k-1 = 1, 2, 3$ и 4.

$$M_{1,r} = \sum^2 y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{2,r} = \sum^2 y_{r+1}^{(n)} + 2\sum^3 y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{3,r} = \sum^2 y_{r+1}^{(n)} + 6\sum^3 y_{r+1}^{(n)} + 6\sum^4 y_{r+1}^{(n)},$$

$$M_{4,r} = \sum^2 y_{r+1}^{(n)} + 14\sum^3 y_{r+1}^{(n)} + 36\sum^4 y_{r+1}^{(n)} + 24\sum^5 y_{r+1}^{(n)}.$$

Задача состоит в определении $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, y_3^{(k)} \ldots$ по заданным значениям $y_0^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

Отбрасывая в формуле (2) остаточный член и полагая $r = 1$, мы получим числа $y_1^{(k)}$. Далее из уравнения (1) получаем значение $y_1^{(n)}$. При помощи $y_1^{(n)}$ заполняем в таблице сумм наклонную восходящую строку, выходящую из $y_2^{(n)}$. Затем, полагая $r = 2$ в формуле (2) (без остаточного члена), вычисляем числа $y_2^{(k)}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-2)$. После из уравнения (1) вычисляем $y_2^{(n)}$ и заполняем в таблице сумм наклонную восходящую строку, выходящую из $y_3^{(n)}$.

Остальные значения $y_\nu^{(k)}$ $(\nu = 3, 4, \ldots, r)$ вычисляются по таблице сумм $y_\nu^{(n)}$ при помощи формулы (2), причем соответствующие числа $y_\nu^{(n)}$ даются уравнением (1).

Этот метод может быть рекомендован и в тех случаях, когда правая часть (1) содержит $y^{(n-1)}$. Значение $y_1^{(n-1)}$, нужное для интегрирования, может быть вычислено последовательными приближениями. Значения же $y_\nu^{(n-1)}$ $(\nu = 2, 3, \ldots)$ могут быть легко получены с помощью формулы трапеции (незамкнутого типа). Но можно выполнить интегрирование и не прибегая к последовательным приближениям. Для этого достаточно использовать уравнение, содержащее $y^{(n-1)}$, и то, которое получится из него дифференцированием.

В качестве примера будем искать характеристические числа для дифференциального уравнения

$$y'' = -\lambda f(x)\, y(x)$$

при граничных условиях: $y(0) = 0$, $y(1) = 0$. Функцию $f(x)$ будем считать имеющей непрерывную производную второго порядка в промежутке (0, 1).

Уравнение (2), из которого определяются все y_ν с точностью до множителя $y'(0)$, после несложных преобразований, при $y'(0) = 1$ приводится к виду:

$$y_r = rh - \lambda h^2 \sum_{\nu=1}^{r-1} (r-\nu) f_\nu y_\nu .$$

Таким образом определение характеристических чисел сводится к разысканию лишь $y_1, y_2, \ldots, y_r$. Приравняв нулю y_r $(r > 1)$, мы получим уравнение для определения λ.

Вычисление показывает, что

$$y_1 = h,$$

$$y_2 = 2h - \lambda h^3 f_1,$$

$$y_3 = 3h - 2\lambda h^3 (f_1 + f_2) + \lambda^2 h^5 f_1 f_2,$$

и т. д.

При $h=\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$ для определения λ будем иметь соответственно уравнения: $y_2=0$, $y_3=0$.

В частности, при $f(x)=x$ и $h=\frac{1}{5}$ мы убеждаемся, что λ должно быть корнем уравнения

$$196608\lambda^4-1024\cdot10^5\lambda^3+15616\cdot10^6\lambda^2-8\cdot10^{11}\lambda+10^{13}=0.$$

Результат вычислений показывает, что наименьшее значение λ равно 18,25 (точное же значение λ есть 18,96). Для определения значений функции $y(x)$ в точках деления остается подставить это значение λ в выражения для y_2, y_3 и y_4. Таким образом деление промежутка $(0, 1)$ на 5 равных частей приводит к приближенному значению λ с ошибкой, не превосходящей $3{,}7\%$. Такая точность совершенно достаточна для многих приложений.

Поступило
29 XII 1948