Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Г. Ф. ЛАПТЕВ

ИНВАРИАНТНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ПРОЕКТИВНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 20 I 1949)

1. В настоящей работе получены инвариантные формулы для определения всех основных дифференциально-геометрических объектов, связанных с поверхностью в проективном пространстве. Эти формулы не зависят ни от выбора сети, к которой отнесена поверхность, ни от выбора проективной нормали; они выдерживают любые преобразования подвижного репера первого порядка. Благодаря этому их можно применять и в метрической теории поверхности с классическим вычислительным аппаратом. Примененный в настоящей работе метод опирается на теорию внешних форм Картана и на теорию представлений непрерывных групп ([1–3]).

2. Мы будем рассматривать (в малом) поверхность в трехмерном пространстве, фундаментальная группа которого или проективная или является подгруппой проективной группы. С текущей точкой M этой поверхности мы будем связывать подвижной проективный точечный репер $M_0 M_1 M_2 M_3$ первого порядка, т. е. репер, у которого одна вершина M_0 совпадает с рассматриваемой текущей точкой M и две следующие вершины M_1, M_2 лежат в касательной плоскости к поверхности, проведенной в точке M. Два параметра u, v, определяющие положение точки M на поверхности, мы будем называть главными или первичными параметрами. Остальные 11 параметров, определяющих вместе с главными параметрами положение нашего репера, мы будем называть вторичными параметрами.

3. Инфинитезимальное перемещение свободного точечного репера $M M_1 M_2 M_3$ в проективном пространстве определяется следующей системой дифференциальных уравнений:

$$dM_K = \omega_K^J M_J \qquad (J,\ K,\ L = 0,\ 1,\ 2,\ 3),$$

где ω_K^J — линейные дифференциальные формы, связанные обычными структурными уравнениями Картана:

$$D\omega_K^J = [\omega_K^L \omega_L^J].$$

Семейство реперов первого порядка, присоединенное к поверхности, выделяется дифференциальным уравнением

$$\omega_0^3 = 0,$$

внешнее дифференцирование которого дает

$$[\omega_0^k \omega_k^3] = 0 \qquad (k = 1,\ 2).$$

Эти два уравнения образуют полную систему дифференциальных уравнений, определяющую любую поверхность, отнесенную к семейству реперов первого порядка.

4. Последовательные продолжения полученной системы дают

$$\omega_i^3 = a_{ij}\omega^j \qquad (i,\ j,\ k,\ l,\ m = 1,\ 2;\quad \omega^i = \omega_0^i),$$

$$da_{ij} = a_{ik}\omega_j^k + a_{jk}\omega_i^k - a_{ij}(\omega_0^0 + \omega_3^3) + b_{ijk}\omega^k,$$

$$db_{ijk} = b_{ijl}\omega_k^l + b_{ikl}\omega_j^l + b_{jkl}\omega_i^l - b_{ijk}(2\omega_0^0 + \omega_3^3) -$$

$$-(a_{ij}\omega_k^0 + a_{ik}\omega_j^0 + a_{jk}\omega_i^0) + (a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il})\omega_3^l + c_{ijkl}\omega^l,$$

$$dc_{ijkl} = c_{ijkm}\omega_l^m + c_{ijlm}\omega_k^m + c_{iklm}\omega_j^m + c_{jklm}\omega_i^m - c_{ijkl}(3\omega_0^0 + \omega_3^3) +$$

$$+ (b_{ijk}a_{lm} + b_{ijl}a_{km} + b_{ikl}a_{jm} + b_{jkl}a_{im} + a_{ij}b_{klm} + a_{ik}b_{jlm} + a_{il}b_{jkm} +$$

$$+ a_{jk}b_{ilm} + a_{jl}b_{ikm} + a_{kl}b_{ijm})\omega_3^m - 2(b_{ijk}\omega_l^0 + b_{ijl}\omega_k^0 + b_{ikl}\omega_j^0 + b_{jkl}\omega_i^0) -$$

$$-2(a_{ij}a_{kl} + a_{ik}a_{jl} + a_{jk}a_{il})\omega_3^l + \partial_{ijklm}\omega^m,$$

. . . .

где a_{ij}; b_{ijk}; c_{ijkl}; ∂_{ijklm}; . . . суть функции всех параметров, симметричные относительно всех своих индексов.

5. Если мы зафиксируем точку M на поверхности, т. е. положим $\omega^1 = \omega^2 = 0$, и обозначим через δ символ частного дифференцирования по всем вторичным параметрам, то полученная последовательность систем уравнений примет следующий вид:

$$\delta a_{ij} = a_{k(i}\bar{\omega}_{j)}^k - a_{ij}(\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_3^3),$$

$$\delta b_{ijk} = \frac{1}{2} b_{l(ij}\bar{\omega}_{k)}^l - b_{ijk}(2\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_3^3) - \frac{1}{2} a_{(ij}\bar{\omega}_{k)}^0 + \frac{1}{2} a_{(ij}a_{k)l}\bar{\omega}_3^l,$$

$$\delta c_{ijkl} = \frac{1}{6} c_{m(ijk}\bar{\omega}_{l)}^m - c_{ijkl}(3\bar{\omega}_0^0 + \bar{\omega}_3^3) - a_{(ij}a_{k)l}\bar{\omega}_3^l -$$

$$-\frac{1}{3} b_{(ijk}\bar{\omega}_{l)}^0 + \frac{1}{12} b_{(ijk}a_{lm)}\bar{\omega}_3^m.$$

В этих уравнениях черта, поставленная над формой ω, означает, что в этой форме зафиксированы главные параметры и их дифференциалы положены равными нулю; круглые скобки, в которые заключены индексы, означают, что над этими индексами производятся всевозможные перестановки и затем полученные величины суммируются.

Таким образом, мы пришли в общем случае к бесконечной последовательности пфаффовых систем, из которых каждая следующая содержит в себе предыдущую. Все эти системы являются вполне интегрируемыми и определяют последовательность представлений локальной стационарной подгруппы, сохраняющей точку M и касательную плоскость MM_1M_2. Эти представления осуществляются как группы преобразований в последовательно расширяющихся пространствах переменных (a_{ij}); $(a_{ij},\ b_{ijk})$; $(a_{ij},\ b_{ijk},\ c_{ijkl})$; . . ., которые можно рассматривать как проективно-дифференциальные геометрические объекты различных классов, присоединенные к текущей точке поверхности и инвариантно с ней связанные. Полученную последовательность геометрических объектов мы будем называть фундаментальной последовательностью.

Если к текущей точке поверхности присоединен геометрический объект, инвариантно связанный с поверхностью, то его компоненты в произвольном репере первого порядка должны инвариантно выражаться через компоненты некоторого объекта фундаментальной последовательности, и обратно.

Ниже приводятся эти инвариантные выражения геометрических объектов проективно-дифференциальной геометрии поверхности. При этом рассмотрение случаев вырождения (развертывающиеся поверхности, поверхности второго порядка и т. д.) для краткости исключено. По этой же причине исключены двойственные построения и образы.

6. Прежде всего отметим, что величины a_{ij} образуют простейший геометрический объект — тензор. Обращение в нуль этого тензора есть условие вырождения поверхности в плоскость. Обращение в нуль его детерминанта указывает на развертываемость поверхности.

В метрической теории поверхности форма $a_{ij}\omega^i\omega^j$ является второй квадратичной формой поверхности. Приравняв ее нулю, мы получим дифференциальное уравнение асимптотической сети.

7. В пространстве величин a_{ij}, b_{ijk} мы определим новые величины a, a^{ij}, b_k, b, $\tilde{b}_{ijk}$, b_0, b_{ij}, b^{ik} при помощи следующих конечных и дифференциальных уравнений:

$$a = \operatorname{Det} a_{ij}, \qquad a^{ik}a_{kj} = \delta^i_j,$$

$$d\ln a = 2(\omega^k_k - \omega^0_0 - \omega^3_3) + b_k\omega^k, \quad b = a^{ij}b_ib_j,$$

$$\tilde{b}_{ijk} = 4b_{ijk} - \frac{1}{2}a_{(ij}b_{k)}, \quad b_0 = a^{ij}a^{pq}a^{\alpha\beta}\tilde{b}_{ip\alpha}\tilde{b}_{jq\beta},$$

$$b_{ij} = a^{pq}a^{\alpha\beta}\tilde{b}_{ip\alpha}\tilde{b}_{jq\beta}, \quad b^{ik}b_{kj} = \delta^i_j \quad (i,\ j,\ k,\ \beta,\ \alpha,\ p,\ q = 1,\ 2).$$

8. Величины $\tilde{b}_{ijk}$ удовлетворяют уравнению

$$\delta\tilde{b}_{ijk} = \tilde{b}_{ijl}\bar{\omega}^l_k + \tilde{b}_{ikl}\bar{\omega}^l_j + \tilde{b}_{jkl}\bar{\omega}^l_i - \tilde{b}_{ijk}(2\bar{\omega}^0_0 + \bar{\omega}^3_3)$$

и образуют тензор. Равенство нулю этого тензора есть условие вырождения поверхности в поверхность второго порядка.

Дифференциальное уравнение

$$\tilde{b}_{ijk}\,\omega^i\omega^j\omega^k = 0$$

определяет на поверхности линии Дарбу ([4]).

Отношение форм

$$\frac{\tilde{b}_{ijk}\,\omega^i\omega^j\omega^k}{a_{ij}\,\omega^i\omega^j}$$

является линейным элементом Фубини ([4]).

Величина b_0 удовлетворяет уравнению

$$\delta b_0 = b_0(\bar{\omega}^3_3 - \bar{\omega}^0_0)$$

и является интариантом. Обращение в нуль этого инварианта есть условие того, что поверхность линейчатая.

9. Определим далее новые величины l_{ij}, l, $\tilde{l}$, $\tilde{l}_{ij}$, l_k, l^i, l_0, k_i, k, c_k, g_k, g^i, g в пространстве величин a_{ij}, b_{ijk}, c_{ijkl} при помощи следующих уравнений:

$$db_i = b_k\omega^k_i - b_i\omega^0_0 - 4\omega^0_i + 4a_{ik}\omega^k_3 + l_{ij}\omega^j,$$

$$l = a^{ij}l_{ij}, \quad \tilde{l} = 4l - b, \quad \tilde{l}_{ij} = l_{ij} - \frac{1}{4}b_ib_j - \frac{1}{8}\tilde{l}a_{ij},$$

$$l_k = a^{ip}a^{jq}\tilde{l}_{ij}\tilde{b}_{pqk}, \quad l^i = b^{ik}l_k, \quad l_0 = a_{ij}l^il^j,$$

$$k_i = \frac{1}{4} b_i - a_{ij} l^j, \quad k = a^{ij} k_i k_j,$$

$$d \ln b_0 = \omega^3{}_3 - \omega^0{}_0 + c_k \omega^k,$$

$$g_k = \frac{1}{2} c_k - \frac{1}{8} b_k, \quad g^i = a^{ik} g_k, \quad g = g^k g_k.$$

10. Любая прямая канонического пучка проективных нормалей, присоединенного к поверхности в точке M, определяется начальной точкой M и точкой

$$P = [\sigma g^k + (\sigma - 1) l^k] M_k + M_3,$$

где σ — инвариантный параметр, определяющий положение прямой в пучке. При $\sigma = 0$ получается директриса Вильчинского,; при $\sigma = {}^1/_3$ — ось Чеха; при $\sigma = {}^1/_2$ — ребро Грина; при $\sigma = 1$ — нормаль Фубини; при $\sigma = {}^1/_4$ — прямая Картана; при $\sigma = \infty$ — каноническая касательная ([4]).

11. Если проективные координаты текущей точки P относительно нашего репера $MM_1M_2M_3$ обозначить x^K, т. е. положить $P = x^K M_K$ ($K = 0, 1, 2, 3$), то уравнение пучка поверхностей Дарбу будет иметь вид:

$$-a_{ij} x^i x^j + 2x^0 x^3 + \frac{1}{2} b_i x^3 x^i + \left(\frac{1}{32} \bar{l} + \lambda b_0\right) x^3 x^3 = 0,$$

где λ — инвариантный параметр, определяющий поверхность в пучке. При $\lambda = 0$ получается поверхность Ли; при $\lambda = -1$ — поверхность Вильчинского — Бомпиани; при $\lambda = -{}^1/_3$ — поверхность Фубини; при $\lambda = \infty$ — дважды взятая касательная плоскость ([4]).

12. Определим, наконец, величины m^i_k, n_{jk}, c_{ij}, c, $\tilde{c}_{ij}$ в пространстве переменных a_{ij}, b_{ijk}, c_{ijkl}, ∂_{ijklm} при помощи следующих уравнений:

$$dl^i = -l^k \omega^i_k + l^i \omega^3_3 + \omega^i_3 + m^i_k \omega^k,$$

$$dk_j = k_i \omega^i_j - k_j \omega^0_0 - \omega^0_j + n_{jk} \omega^k,$$

$$c_{ij} = n_{ij} - k_i k_j - a_{ik} m^k_j - a_{ip} l^p a_{jq} l^q - k_p l^p a_{ij},$$

$$c = a^{ij} c_{ij}, \quad \tilde{c}_{ij} = c_{ij} + c_{ji} - c a_{ij}.$$

13. Квадратичная форма $\tilde{c}_{ij} \omega_i \omega_j$ является третьей квадратичной формой Фубини.

Три формы $b_0 a_{ij} \omega^i \omega^j$, $b_0 \tilde{b}_{ijk} \omega^i \omega^j \omega^k$, $c_{ij} \omega^i \omega^j$ являются инвариантными формами. Их коэффициенты $b_0 a_{ij}$, $b_0 \tilde{b}_{ijk}$, c_{ij} образуют соответственно три тензора, определяющие поверхность с точностью до ее проективного преобразования.

14. В заключение заметим, что все полученные формулы будут применимы и к гиперповерхности в многомерном проективном пространстве, если внести соответствующие изменения в числовые коэффициенты и заменить индекс 3 на индекс n.

Заметим также, что фундаментальная последовательность геометрических объектов строится без труда для любого многообразия в произвольном пространстве Клейна.

Поступило
16 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. П. Фиников, Метод внешних форм Картана, 1948. [2] E. Kähler, Einführung in die Theorie der Systeme von Differentialgleichungen, 1934. [3] Н. Г. Чеботарев, Теория групп Ли, 1940. [4] С. П. Фиников, Проективно-дифференциальная геометрия, 1937.