Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXV, № 2

МАТЕМАТИКА

Академик С. Н. БЕРНШТЕЙН

О МАЙОРАНТАХ КОНЕЧНОГО ИЛИ КВАЗИ-КОНЕЧНОГО РОСТА

Напомню [1] общее определение майоранты (и функции) конечного роста: функция $H(x) \geqslant 0$ $(-\infty < x < \infty)$ называется майорантой конечного роста ($H(x) \in \mathfrak{M}$), если неравенство

$$|G_p(x)| \leqslant H(x) \qquad (-\infty < x < \infty) \tag{1}$$

для всякой целой функции $G_p(x)$ степени p влечет за собой для всех ее производных

$$|G_p^{(k)}(x)| \leqslant H_{k,p}(x) \qquad (-\infty < x < \infty), \tag{2}$$

причем для любого фиксированного x

$$\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{H_{k,p}(x)} \leqslant p. \tag{3}$$

Мы называем $f(x)$ функцией конечного роста, если $|f(x)| \in \mathfrak{M}$. В указанном месте [1] даны также две леммы, позволяющие заменить приведенное выше определение двумя различными эквивалентными определениями: первая из них констатирует, что требование (2), (3) равнозначно существованию для каждого $p > 0$ такой целой функции $H_p(z)$ степени p, что (1) имеет следствием

$$|G_p(z)| \leqslant |H_p(z)| \tag{4}$$

при всех комплексных z.

Назовем функцию $H(x)$ майорантой квази-конечного (или конечного) роста ($H(x) \in \mathfrak{M}^*$), если неравенство (1), где $G_p(x)$ — функция степени p, влечет для каждого данного x $(-\infty < x < \infty)$

$$|G_p^{(k)}(x)| \leqslant H_{k,p^*}(x), \quad \overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{H_{k,p^*}} \leqslant p^*, \tag{5}$$

или, что то же самое, имеет следствием для всех комплексных z

$$|G_p(z)| \leqslant |H_{p^*}(z)|, \tag{6}$$

где $H_{p^*}(z)$ — целая функция конечной степени p^*, зависящая только от $H(x)$ и p, причем $p^* = \varphi(p)$ есть некоторая конечная монотонная функция переменной p. Аналогично изменяется формулировка второй леммы.

Прежде чем перейти к рассмотрению свойств, характеризующих весь класс $\mathfrak{M}^*$ майорант квази-конечного роста, отметим класс

$\mathfrak{M}_0(\alpha) \subset \mathfrak{M}$ майорант, несколько расширяющий примеры конечного роста $H(x)$ заметки [1].

Теорема 1. *Функция* $H(x) = e^{\alpha x} \mid H_0(x) \mid$, *где* α — *вещественное число**, $H_0(x)$ — *любая целая функция нулевого рода, есть майоранта конечного роста* ($H(x) \in \mathfrak{M}_0(\alpha) \subset \mathfrak{M}$). *А именно, неравенство*

$$| G_p(x) | \leqslant e^{\alpha x} \, | H_0(x) | = H(x), \tag{1bis}$$

где без ущерба для общности можно ограничиться предположением, что $H_0(x) = s(x) + it(x)$ *не имеет корней в верхней полуплоскости* (*полагая для определенности* $\alpha > 0$, $k \geqslant 0, -\infty < x < \infty$, $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, $y > 0$), *имеет следствием*

$$| G_p^{(k)}(x) | \leqslant H_p^{(k)}(x), \tag{2bis}$$

$$| G_p(z) | \leqslant | H_p(z) |, \qquad | G_p(\bar{z}) | \leqslant | H_p(z) |, \tag{3bis}$$

где $H_p(x) = [s(x) + it(x)] \, e^{[\alpha - i\sqrt{p^2 - \alpha^2}]x}$ *для всех* $p \geqslant \alpha$; *в случае* $p < \alpha$ *имеем тождественно* $G_p(x) = 0$.

Перейдем теперь к формулировке общей теоремы, характеризующей весь класс $\mathfrak{M}^*$ (включающий, в частности, класс $\mathfrak{M}$ майорант конечного роста).

Теорема 2. *Если граничащая функция* $H(x) = | s(x) + it(x) |$ *в* (1) *есть модуль целой функции конечной степени* σ, *не имеющей корней в верхней полуплоскости, то условие, необходимое и достаточное для того, чтобы* $H(x)$ *была майорантой квази-конечного роста* ($H(x) \in \mathfrak{M}^*$), *заключается в том, чтобы ее* (*отличные от нуля*) *корни* $\alpha_k - i\beta_k$ ($\beta_k \geqslant 0$) *удовлетворяли требованию*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\beta_k}{\alpha_k^2 + \beta_k^2} < \infty. \tag{7}$$

При соблюдении (7) *неравенство* (1) *влечет за собой для всех* $p \geqslant 0$ *в верхней полуплоскости*

$$| G_p(z) | \leqslant | (s(z) + it(z)) \, e^{-ipz} | \tag{6bis}$$

*и аналогичное неравенство в нижней полуплоскости: поэтому*** $p^* \leqslant p + \sigma$.

Следствие 1. *Для того чтобы* $H(x) \geqslant 0$ *была майорантой конечного роста класса* $\mathfrak{M}_0(\alpha)$, *необходимо и достаточно, чтобы вместе с* $H(x)$ *майорантой квази-конечного* (*или конечного*) *роста была и* $| H(xe^{i\theta}) |$ *при некотором* θ ($0 < \theta < \pi$).

Следствие 2. *Все целые функции конечной степени* $s(x) + it(x)$, *не имеющие корней в верхней полуплоскости, являются функциями квази-конечного роста* ($| s(x) + it(x) | \in \mathfrak{M}^*$).

---

* Полагая $a = \alpha + \beta i$ комплексным, мы можем представить $H(x) = | e^{ax} H_0(x) | = e^{\alpha x} | H_0(x) |$ и класс $\mathfrak{M}_0(a) \equiv \mathfrak{M}_0(\alpha)$. Напротив, при вещественных $\alpha \gtrless \alpha_1$ $\mathfrak{M}_0(\alpha)$ и $\mathfrak{M}_0(\alpha_1)$ не содержат ни одной общей майоранты (кроме 0).

** Для $p = 0$ ($G_p(x)$ — многочлены) неравенство (6^{bis}) доказано впервые в моей монографии [2] (стр. 74). Кроме того, более сильное неравенство, установленное Н. И. Ахиезером [4] при некотором дополнительном ограничении, обеспечивает $p^* = p$ для $p \geqslant \sigma$ и $p^* \leqslant \sigma$ для $p \leqslant \sigma$. Не исключена возможность, что аналогичное уточнение неравенства (6^{bis}) возможно и в общем случае, так что квази-конечный характер роста майорант $H(x)$ конечной степени σ обнаруживался бы, как и в случае Ахиезера, лишь для $p < \sigma$.

Действительно, по известной теореме Линделефа, в этом случае $s(x)+it(x)$ должна удовлетворять условию (7). С другой стороны, благодаря недавно доказанной теореме Н. И. Ахиезера ([3]), из теоремы 2 вытекает также

Следствие 3. *Для того чтобы целая функция конечной степени p $G_p(x)\geqslant 0$ была майорантой квази-конечного роста ($G_p(x)\in\mathfrak{M}^*$), необходимо и достаточно, чтобы она могла быть представлена в виде*

$$G_p(x)=|s(x)+it(x)|^2=s^2(x)+t^2(x).$$

где $s(x)+it(x)$ есть целая функция степени $p/2$, не имеющая корней в верхней полуплоскости.

Кроме того, принимая во внимание эквивалентность ([3]) условия (7) условию

$$\sup_{R\to\infty}\int_1^R\frac{\lg|H(x)H(-x)|}{x^2}\,dx<\infty \tag{8}$$

(когда $H(x)$ конечной степени), получаем

Следствие 4. *Любая* функция конечной степени $H(x)\geqslant 0$, удовлетворяющая* (8), *является майорантой квази-конечного роста.*

Следствие 5. *Если $H(x)\in\mathfrak{M}^*$ и $H_1(x)\in\mathfrak{M}^*$ — модули функции конечной степени, то и произведение $H(x)H_1(x)\in\mathfrak{M}^*$, и наоборот.*

Будем называть майоранту $H(x)$ **аддитивной**, если $H(x)+H(-x)$ также является майорантой, иначе говоря, майоранта $H(x)$ называется аддитивной, если существует четная майоранта $F(x^2)\geqslant H(x)$.

Следствие 6. *Для того чтобы сумма $[H(x)+H_1(x)]\in\mathfrak{M}^*$ любых майорант $H(x)\in\mathfrak{M}^*$, $H_1(x)\in\mathfrak{M}^*$ квази-конечного роста конечной степени также была майорантой, необходимо и достаточно, чтобы каждая из них была аддитивна**.*

Будем называть функцию $H(x)>0$ $(-\infty<x<\infty)$ **позитивной**, если $\inf H(x)=c>0$.

Следствие 7. *Если модули функций конечной степени $H(x)\in\mathfrak{M}^*$, $H_1(x)\in\mathfrak{M}^*$ позитивны, то и сумма $[H(x)+H_1(x)]\in\mathfrak{M}^*$.*

Будем называть позитивную функцию $H(x)$ **почти возрастающей** (при $\pm x\to\infty$), если можно указать такую (не зависящую от x) постоянную $k\geqslant 1$, что $H(x)\leqslant kH(\lambda x)$ при любом $\lambda\geqslant 1$. (В таком случае $H(x+a)$ также будет почти возрастающей функцией для всякого данного $a\geqq 0$.)

Теорема 3. *Если модуль функции конечной степени $H(x)$ есть почти возрастающая майоранта квази-конечного роста, то $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-a|x|}H(x)=0$ при всяком $a>0$, т. е. индикаторной диаграммой $H(x)$ служит отрезок мнимой оси.*

Следствие 8. *При условии теоремы 3 (как и всегда, когда $\lim\limits_{x\to\pm\infty} e^{-a|x|}H(x)=0$) предельная функция $G(x)$ всякой последовательности функций $G_{p,n}(x)$ данной степени $p>0$, для которых $H(x)$ служит майорантой, имеет индикаторной диаграммой отрезок мнимой оси.*

---

* Если $H(x)$ — модуль целой функции конечной степени, то условие (8) является также и необходимым.

** Не исключена a priori возможность, что сумма майорант конечного роста окажется майорантой квази-конечного роста. Но если аддитивные майоранты $H(x)\in\mathfrak{M}_0$ и $H_1(x)\in\mathfrak{M}_0$ нулевого рода, то и сумма их нулевого рода, т. е. конечного роста. (Это утверждение не вполне точно формулировано в сноске (стр. 435) статьи ([6])).

Назовем функцию $H(x) \geqslant 0$ антимайорантой, если неравенство (1) совместимо для совокупности функций $G_p(x)$ данной конечной степени $p > 0$ со свойством $\sup |G_p(x)| = \infty$ в любом промежутке действительной оси. Из следствия 4 видно, что, какова бы ни была функция $H(x) \geqslant 0$, условие

$$\sup_{R \to \infty} \int_1^R \frac{\log |H(x) H(-x)|}{x^2} dx = \infty$$

необходимо для того, чтобы $H(x)$ могла быть антимайорантой. Кроме того, справедлива

Теорема 4. *Если целая функция $H(x)$ конечной степени есть почти возрастающая функция, то нарушение условия (7) необходимо и достаточно как для того, чтобы $H(x)$ была антимайорантой, так и для того, чтобы всякая непрерывная функция $f(x) = o(H(x))$ могла быть равномерно приближена при помощи функции $G_p(x)$ произвольно фиксированной степени p с весом $H(x)$ (т. е. чтобы при всяком данном $\varepsilon > 0$ для всех x $(-\infty < x < \infty)$ было осуществимо неравенство $|f(x) - G_p(x)| < \varepsilon H(x)$).*

Например, $H(x) = e^x + 1$ есть антимайоранта, хотя e^x (как и 1) является майорантой конечного роста.

Поступило
20 I 1949

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. Н. Бернштейн, ДАН, 60, № 6 (1948). [2] С. Бернштейн, Leçons sur les propriétés extrémales etc., Paris, 1926. [3] Н. И. Ахиезер, ДАН, 63, № 5 (1948). [4] Н. И. Ахиезер, Изв. АН СССР, сер. матем., 10, 411 (1946). [5] С. Н. Бернштейн, Изв. АН СССР, сер. матем., 12, 421, 571 (1948).