Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

ФИЗИКА

М. Л. АНТОКОЛЬСКИЙ

ОТРАЖЕНИЕ ВОЛН ОТ ШЕРОХОВАТОЙ АБСОЛЮТНО ОТРАЖАЮЩЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

(Представлено академиком М. А. Леонтовичем 13 VII 1948)

При отражении световой или звуковой волны от реальной поверхности, кроме регулярно отраженной волны, существует диффузное рассеянное поле, вызванное наличием шероховатостей. Полный расчет обоих полей выполняется лишь для случая, когда шероховатости малы по сравнению с длиной волны ([1—3]). Можно, однако, и в более общем случае провести расчеты, имеющие физический интерес. Настоящая заметка касается регулярной части поля. Мы ставим вопрос о том, при каких условиях это регулярное поле носит характер обычной отраженной волны и о вычислении для этого случая коэффициента отражения в зависимости от длины волны и угла падения. Как отметил Иенч ([4]), переход при определенном угле падения от рассеяния к регулярному отражению служит удобным средством для качественной характеристики отражающей поверхности. Ниже будет показано, что таким путем может быть получена более полная количественная характеристика этой поверхности. Основным упрощающим допущением в расчете является принцип Кирхгофа.

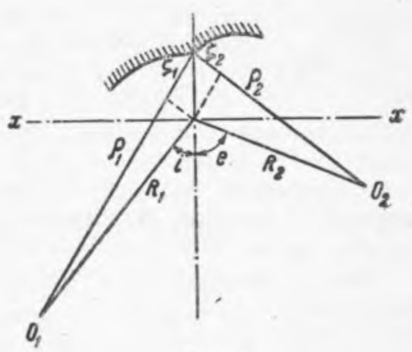

Рис. 1

1. Пусть абсолютно отражающая поверхность изображается непрерывной случайной функцией $z(x, y)$. При этом $\overline{z}=\overline{\partial z/\partial x}=\overline{\partial z/\partial y}=0$. Пусть в точке O_1 находится точечный источник, а в точке O_2 наблюдается поле; обе точки находятся по отношению к поверхности в волновой зоне и расстояния их до поверхности весьма велики в сравнении с неровностями z и с радиусом корреляции функции $z(x, y)$. Для расстояний и углов введем обозначения, ясные из рис. 1.

На отражающей поверхности, согласно принципу Кирхгофа, в области геометрической тени поле считается равным нулю а на открытых местах — принимающим значения, даваемые геометрической оптикой. Элементарная гюйгенсова волна, посылаемая в точку O_2 элементом $d\sigma$, лежащим на открытом месте,

$$du=\frac{ik}{4\pi}\frac{e^{ik(\rho_1+\rho_2)}}{\rho_1\rho_2}[\cos(\rho_1, n)+\cos(\rho_2, n)]. \qquad (1)$$

В приближении, соответствующем принципу Кирхгофа, необходимо предполагать, что она либо достигает точки O_2 неискаженной, либо полностью уничтожается интерференцией с другими волнами, если площадка загорожена по отношению к лучу, выходящему из O_2. Эти допущения, как известно, накладывают некоторые ограничения на характер функции $z(x, y)$, точная математическая формулировка которых еще не найдена. На основании (1) можем написать

$$du = \frac{ik}{2\pi}\,\frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2}\left\{\delta e^{ik(\zeta_1+\zeta_2)}\,\frac{\cos(R_1, n)+\cos(R_2, n)}{2\cos(z, n)}\right\} dx\,dy. \tag{2}$$

Здесь δ — множитель, равный единице на открытых участках и нулю — на загороженных относительно точек O_1 или O_2, и введены обозначения $\zeta_1 = \rho_1 - R_1$ и $\zeta_2 = \rho_2 - R_2$. В фигурную скобку заключен множитель, являющийся случайным. Как выше предположено, можно выбрать участок поверхности большой по сравнению с областью корреляции, но такой, что $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$ остаются на нем постоянными. Интеграция по такому участку дает статистическое среднее значение случайного множителя, а последующая интеграция этих средних по всей поверхности — регулярное поле.

Примем плоскость, содержащую точки O_1 и O_2, за плоскость xz и пусть $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ и $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ — направляющие косинусы $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$. Множитель

$$\delta\,\frac{\cos(R_1, n)+\cos(R_2, n)}{2\cos(z, n)} = \delta\,\frac{(\alpha_1+\alpha_2)\,\partial z/\partial x + (\beta_1+\beta_2)\,\partial z/\partial y + (\gamma_1+\gamma_2)}{2}$$

вообще зависит от трех случайных величин: $z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y$, и вычисление средней требует задания трехмерной функции распределения $P(z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y)$, которую мы предполагаем четной относительно $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$. Если S — вероятность для площадки не оказаться загороженной для прямых лучей, выходящих из O_1 и O_2, то произведение $S \cdot P = P^*(z, \partial z/\partial x, \partial z/\partial y, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ представляет деформированную функцию распределения, учитывающую одни только незагороженные площадки. В силу симметрии она остается четной относительно $\partial z/\partial y$, но не относительно $\partial z/\partial x$.

Нам остается еще выразить ζ_1 и ζ_2 в (2) через z. Имеем, например, для ζ_1:

$$\zeta_1 = \gamma_1 z + \frac{1}{2}\,\frac{z^2}{R_1}\,(1-\gamma_1^2) + \ldots, \tag{3}$$

и сохранение члена первого порядка соответствует фраунгоферову приближению, которым мы сначала займемся.

2. Сперва произведем усреднение гюйгенсовых волн по координате z и обозначим:

$$\psi(v, w, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ik(\gamma_1+\gamma_2)u}\,P^*(u, v, w, \mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)\,du. \tag{4}$$

Тогда результат усреднения случайного множителя в (2) по всем трем переменным можно записать в виде

$$\frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\,\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2) = \frac{\gamma_1+\gamma_2}{2}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\psi\,dv\,dw + \frac{\alpha_1+\alpha_2}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} v\psi\,dv\,dw + \frac{\beta_1+\beta_2}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} w\psi\,dv\,dw\right\}. \tag{5}$$

Третий интеграл тождественно обращается в нуль в силу симметрии. Если можно пренебречь вторым интегралом, то $\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)$ представляет трансформацию Фурье или, в терминах теории вероятностей,— характеристическую функцию для деформированного одномерного распределения $F^*(z)$, причем аргументом характеристической функции является произведение $k(\gamma_1+\gamma_2)$. В частности, для лучей, нормальных к плоскости $z=0$, $S=1$ (если $z(x, y)$ — однозначная функция). Тогда $\varphi(2k)$ представляет просто трансформацию Фурье недеформированной функции распределения $F(z)$.

Окончательно получаем для регулярной волны:

$$\overline{U}=\frac{ik(\gamma_1+\gamma_2)}{4\pi}\int\frac{e^{ik(R_1+R_2)}}{R_1 R_2}\,\varphi(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)\,dx\,dy \tag{6}$$

(интеграция по плоскости $z=0$). Это выражение отличается только множителем φ от обычного выражения для волны, отраженной от плоскости. Оно изображает пространственно-модулированную (corrugated по Рэлею [5]) волну. Легко показать, что на достаточном удалении она превращается в обычную отраженную волну

$$\overline{U}=U_0\varphi(2k\gamma_0), \tag{7}$$

где U_0 — волна, отраженная от идеальной плоскости, а $\gamma_9=\gamma_{10}=\gamma_{20}$ соответствует геометрически отраженному лучу. Среднее поле $\overline{U}=\overline{U}_0(k\gamma_0)$ при этом может быть выделено любым приемником направленного действия. Измерение этого поля в функции частоты дает возможность получить, в том случае, если точки O_1 и O_2 лежат на общей нормали, функцию распределения $F(z)$. В общем случае обратная трансформация Фурье наблюденной функции $\varphi(k)$ дает величину

$$F^*(z)+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\gamma_1+\gamma_2}\,\overline{v}_u(z), \tag{8}$$

где $\overline{v}_u$ — среднее значение $\partial z/\partial x$ при зафиксированном значении, $z=u$.

3. Этот результат получает значительно более простой и физически ясный вид, если ввести явно ограничения, касающиеся гладкости рассеивающей поверхности, взамен неизвестных в точности ограничений вытекающих из принципа Кирхгофа. Именно, если допустить, что для всех частных производных от z соблюдаются неравенства типа:

$$\frac{\partial^3 z/\partial x^3}{\partial^2 z/\partial x^2}\ll k(\gamma_1+\gamma_2), \tag{9}$$

тогда поверхность может быть разбита на «зоны Френеля» шириной порядка $\sqrt{r/k}$, где r — радиус кривизны, согласно (9), постоянный на ширине зоны, и в рассеянии волн эффективно участвуют только главные зоны, образующие блики и определяемые «условием геометрического отражения".

$$\cos(\rho_1, n)=\cos(\rho_2, n).$$

Для этих участков, следовательно, $\partial z/\partial x$ и $\partial z/\partial y$ имеют вполне определенные значения, $\partial z/\partial x=V$, $\partial z/\partial y=W$, зависящие от $\mathbf{R}_1$ и $\mathbf{R}_2$, и функция $P(u, v, w)$, таким образом, превращается в одномерную. Таким образом, $\overline{v}_u=V(\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2)=\sqrt{\dfrac{1-\alpha_1\alpha_2-\gamma_1\gamma_2}{1+\alpha_1\alpha_2+\gamma_1\gamma_2}}$, а в окончательных формулах (7) и (8) для геометрически отраженного луча $\overline{v}_u=0$.

Обратно, для заданной функции распределения $F^*(u)$ можно вычислить коэффициент отражения. В силу наличия осциллирующего множителя $e^{ik(\gamma_1+\gamma_2)u}$ в (4) этот интеграл может быть вычислен при помощи метода перевала в том случае, когда $F(u)$ является медленно меняющейся функцией по сравнению с упомянутым множителем. Как известно, аналитическое условие пригодности этого приближения имеет, аналогично (9), вид

$$\Phi'''(u)/\Phi''(u) \ll k(\gamma_1+\gamma_2),$$

где $\Phi(u)=\lg F(u)$.

При этих предположениях, учитывая, что $\varphi(0)=1$, мы получаем следующее выражение для коэффициента отражения:

$$\varphi(k,\gamma_0)=e^{-k^2\gamma_0\beta/2}, \tag{10}$$

где $$\beta=-\varphi''(0)=\overline{z^2}+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\gamma_1+\gamma_2}\int_{-\infty}^{\infty} z^2\,\overline{v}_z(z)\,dz$$

(усреднение только для незатененных площадок), или, учитывая предположение о гладкости, $\beta=z^2\left(1+\frac{\alpha_1+\alpha_2}{\gamma_1+\gamma_2}V\right)$. Заметим, что этот приближенный результат является точным для гауссовского распределения.

Возвращаясь к разложению (3), учтем следующий член

$$\frac{z^2}{2}\left(\frac{1-\gamma_1^2}{R_1}+\frac{1-\gamma_2^2}{R_2}\right)=\eta z^2.$$

Мы получаем взамен (10), при тех же предположениях, обозначая η_0 значение η, соответствующее направлению отраженного луча:

$$\varphi(k\gamma_0)=\frac{1}{\sqrt{1+k^2\eta_0^2\beta^2}}\exp\left[-\frac{k^2\gamma_0\beta}{2(1+k^2\eta_0^2\beta^2)}+\frac{ik^3\gamma_0^2\eta_0\beta^2}{2(1+k^2\eta_0^2\beta^2)}-\frac{ik\eta_0\beta}{2}\right]. \tag{11}$$

Мнимая часть выражения, стоящего в экспоненте, влияет только на фазу, а не на амплитуду отраженной волны. Существует зона, которая отличается от зоны Фраунгофера только наличием этого мало существенного фактора, так как изменение модуля выражения (10) по сравнению с (11) сказывается на значительно более близком расстоянии от поверхности.

Автор выражает свою глубокую благодарность акад. М. А. Леонтовичу и Л. М. Бреховских за проявленный интерес и весьма ценные советы.

Физический институт
им. П. Н. Лебедева
Академии Наук СССР

Поступило
2 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. Mandelstam, Ann. d. Phys., **41**, 609 (1913). [2] A. Andronow u. M. Leontowitsch, Z. f. Phys., **38**, 485 (1926). [3] Gans, Ann. d. Phys., **74**, 231 (1924). [4] Jentzsch, Z. f. techn. Phys., **7**, 310 (1926). [5] Рэлей, Волновая теория света, 1940, § 15.