Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА

Л. И. РУБИНШТЕЙН

К ВОПРОСУ О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VII 1948)

Задача Стефана [1] о линейном распространении тепла, сопровождающемся выделением скрытой теплоты плавления, может быть приведена к виду

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} = \frac{\partial u_1}{\partial t}, \quad 0 < x < y(t); \tag{1^1}$$

$$a^2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = \frac{\partial u_2}{\partial t}, \quad y(t) < x < 1, \quad t > t_0; \tag{1^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1(0, t) = f_1(t) \leqslant 0, \quad u_i(y(t), t) = 0\,^*; \\ u_2(1, t) = f_2(t) \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad t > t_0; \end{array}\right\} \tag{1^3}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1(x, t_0) = \varphi_1(x) \leqslant 0, \quad u_2(x, t_0) = \varphi_2(x) \geqslant 0, \\ \varphi_i(y(0)) = 0, \quad i = 1, 2, \quad f_1(0) = \varphi_1(0), \quad f_2(0) = \varphi_2(1); \end{array}\right\} \tag{1^4}$$

$$\frac{d}{dt}\, y(t) = \frac{\partial}{\partial x} u_1(y(t), t) - \frac{\partial}{\partial x} u_2(y(t), t), \quad y(t_0) = l. \tag{1^5}$$

В [3] нами доказаны существование и единственность решения задачи (1^{1-5}) при $l \neq 0$, $l \neq 1$ на отрезке $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + \Delta T$; $\Delta T = K\rho^2$; $\rho = \min(l, 1 - l)$; $K = K[\max\{|\dot f_i(t)|, |\dot\varphi_i(x)|\}]$.

Заметим, что при $l = 0$ уравнение (6′) из [3] не удовлетворяет (при любом $y(t)$) условиям теорем существования решений функциональных уравнений типа Вольтерра, данных А. Н. Тихоновым [4].

В настоящей работе мы доказываем существование решения задачи (1^{1-5}) для случая $l = 0$ в предположении непрерывности первых и вторых производных от $f_i(t)$ и $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2)$.

1. Пусть $f_1(t) \leqslant 0$ при $t \geqslant 0$, $f_1(0) = \varphi_2(0) = 0$ и, сверх того,

$$\left.\begin{array}{l} -c_0 t^m < f_1(t) < -c_1 t^m, \quad c_1 > 0, \quad m \geqslant 1, \\ M = \max\left\{|\dot f_1|, |\dot f_2|, \dfrac{1}{a^2}|\dot f_2|, |f_2|, |\dot\varphi_2|, |\ddot\varphi_2|\right\}. \end{array}\right\} \tag{2}$$

Положим $z_i(t) = \alpha_i t^{m_i}$, $m_1 = m$, $m_2 = 1$, и определим $\overset{\bullet}{u}_{1i}(x, t)$, $\overset{\bullet}{u}_{2i}(x, t)$ $(i = 1, 2)$ как решения задачи (1^{1-4}) при $t_0 = 0$ и $y(t) = z_i(t)$. Тогда

---

* Температуры u_i отсчитываются в разных шкалах: если ϑ_i температура в °С, k_i—теплопроводность и c_i— теплоемкость фазы i, λ — скрытая теплота плавления, то $u_i(x, t) = \dfrac{k_i c_1}{k_1 \lambda} \vartheta_i$ $(i = 1, 2)$. Скачком плотности между фазами пренебрегаем [2].

можно указать такие $T>0$, $\alpha_1>0$ столь малое и $\alpha_2>0$ столь большое, что при всех $t\subset(0,T]$ будет:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dz_1}{dt}&<\frac{\partial}{\partial x}u_{11}^*(z_1(t),t)-\frac{\partial}{\partial x}u_{21}^*(z_1(t),t),\\ \frac{dz_2}{dt}&>\frac{\partial}{\partial x}u_{12}^*(z_2(t),t)-\frac{\partial}{\partial x}u_{22}^*(z_2(t),t).\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

Действительно, положим

$$w_1(x,t)=-\frac{c_1}{e-1}\left(\exp\left(1-\frac{x}{\alpha_1 t^m}\right)-1\right);\qquad w_2(x,t)=-c_0t\left[1-\frac{x}{\alpha_2 t}\right];$$

$w_2(x,t)$ субпараболична при всех $t\geqslant 0$; $w_1(x,t)$ суперпараболична при $0\leqslant t\leqslant 1$ и $1-\alpha_1(\alpha_1+1)m>0$.

Отсюда, из краевых условий (1^3), (2) и принципа максимума для суперпараболических функций [5] следует

$$\frac{\partial u_{11}^*}{\partial x}(z_1(t),t)\leqslant\frac{\partial}{\partial x}w_1(z_1(t),t)=\frac{c_1}{\alpha_1(l-1)},\quad\frac{\partial u_{12}^*}{\partial x}(z_2(t),t)\leqslant\frac{c_0}{\alpha_2}.\tag{4}$$

С другой стороны, определяя $u_{2i}^*(x,t)$ из (6^2) статьи [3] при замене в нем $y(t)$ на $z_1(t)$, найдем, что при $0\leqslant t\leqslant\frac{1-\rho}{\alpha_2}=T^*$ $(\rho>0)$ имеет место:

$$0\leqslant\frac{\partial u_{21}^*}{\partial x}(z_1(t),t)\leqslant K,$$

где $K=K(M)$ не убывает вместе с α_1. Отсюда и из (4) следует справедливость (3) при $T\leqslant\min(T^*,1)$.

2. Положим $t_0>0$. Определим $u_i(x,t)$, $y(t)$ как решение задачи (1^{1-5}) при начальных данных

$$u_i(x,t_0)=u_{i1}^*(x,t_0),\qquad l=z_1(t_0).\tag{5}$$

Легко видеть, исходя из принципа максимума и [3], что если $y(t)$ решение задачи, то

$$z_1(t)\leqslant y(t)\leqslant z_2(t)\leqslant 1-\rho\quad\text{при}\quad t_0\leqslant t\leqslant T.\tag{6}$$

Пусть

$$\alpha\geqslant\frac{c_0}{\alpha_1},\quad\beta\geqslant\max\{M,\alpha^2\},\quad\alpha\rho+\beta\frac{\rho^2}{2}\geqslant M.\tag{7}$$

Тогда, если $u_i(x,t)$, $y(t)$ определены при $t_0\leqslant t\leqslant T_0\leqslant T$, то при всех t:

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}(x,t)\right|<\alpha+\beta|x-y(t)|\qquad(i=1,2,\ldots).\tag{8}$$

Заметим сперва, что $\partial u_i/\partial t$ — параболические функции, удовлетворяющие краевым условиям:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial u_1}{\partial t}(0,t)=\frac{df_1}{dt},\qquad\frac{\partial u_i}{\partial t}(y(t),t)=-\frac{\partial}{\partial x}u_i(y(t),t)\frac{dy}{dt};\\ &\frac{\partial u_2}{\partial t}(x,0)=\frac{d^2\varphi_2}{dx^2}\qquad(u_i=u_{i1}^*,\ y=z_1\ \text{при}\ t\leqslant t_0).\end{aligned}\right\}\tag{9}$$

Пусть $t_1 < t_2 < \ldots < t_n \leqslant T_0$ — последовательность значений t, при которых dy/dt меняет знак. Так как в силу (3) и (5) $dy/dt > 0$ при $t = t_0$, то $dy/dt \geqslant 0$ при $t_{2(k-1)} \leqslant t \leqslant t_{2k-1}$ и $dy/dt \leqslant 0$ при $t_{2k-1} \leqslant t \leqslant t_{2k}$.

Положим

$$u_1^*(x,t) = -\alpha[y(t) - x] - \beta\frac{[y(t)-x]^2}{2} \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant y(t), t_{2(k-1)} \leqslant t \leqslant t_{2k-1}.$$

$$u_2^*(x,t) = \alpha[x - y(t)] + \beta\frac{[x-y(t)]^2}{2} \text{ при } y(t) \leqslant x \leqslant 1, \ t_{2k-1} \leqslant t \leqslant t_{2k}.$$

Из суперпараболичности u_2^*, субпараболичности u_1^*, (7), (2), (1[3]) и принципа максимума следует, что если

$$u_1^*(x, t_{2(k-1)}) \leqslant u_1(x, t_{2(k-1)}); \quad u_2^*(x, t_{2k-1}) \geqslant u_2(x, t_{2k-1}),$$

то при всех $t \leqslant T_0$

$$\left|\frac{\partial u_i}{\partial x}\right|_{x=y(t)} \leqslant \left|\frac{\partial}{\partial x}u_i^*\right|_{x=y(t)} = \alpha. \tag{10}$$

Справедливость указанных неравенств без труда доказывается методом индукции с помощью (7) и (1[5]). Из (10), в силу (9), (7), (1[1–5]) и (2) немедленно получаем (8).

3. Из заключений ([3]), (6) и (8) следует возможность определения $u_i(x,t)$, $y(t)$ на всем интервале $t_0 \leqslant t \leqslant T$. Действительно, допустим, что u_i, y, определены на интервале (t_0, T_0). Тогда, принимая $u_i(x, T_0)$, $y(T_0) = L_i$ за новые начальные данные, сможем в силу ([3]), (2) и (7) расширить интервал определения u_i и y на величину $\Delta T = K(\alpha+\beta)\rho_1^2$ ($\rho_1 = \min(z_1(T_0), \rho)$). Так как $z_1(t)$ возрастает, видим, что ΔT является возрастающей функцией от T_0. Отсюда следует возможность расширения интервала определения решения u_1, u_2, y до $t = T$ с помощью конечного числа шагов при любом наперед заданном t_0.

Возьмем теперь произвольную последовательность

$$t_{01} > t_{02} > \ldots > t_{0n} > \ldots, \quad \lim_{n\to\infty} t_{0n} = 0.$$

Примем $t_0 = t_{0n}$; $u_i(x,t)$, $y(t)$ — функции параметра t_0. Будем писать $u_i = u_{in}$, $y = y_n$ при $t_0 = t_{0n}$. Легко видеть, что $y_n \leqslant y_{n+1}$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Действительно, в силу (6) $y_{n+1}(t_{0n}) \geqslant z_1(t_{0n}) = y_n(t_{0n})$. Но отсюда, как и при доказательстве (6), следует $y_n \leqslant y_{n+1}$ при всех $t \leqslant T$. В силу (1[3]) и (10) $|\dot{y}_n(t)| < \alpha$. Следовательно, $\{y_n(t)\}$ равномерно ограничена и равностепенно непрерывна. Из монотонности $\{y_n(t)\}$ и теоремы Арчела следует, что $\{y_n(t)\}$ сходится к непрерывной $\bar{y}(t)$. Из равномерной ограниченности $\{\dot{y}_n(t)\}$ следует, что $\bar{y}(t)$ имеет ограниченные производные числа. Но тогда, как известно, существует единственное решение $\bar{u}_1, \bar{u}_2$ задачи (1[1–4]) при $y \equiv \bar{y}$. Легко видеть, что $\bar{u}_i(x,t)$, $\bar{y}(t)$ осуществляют решение задачи (1[1–5]). Действительно, пусть G_{1n}, G_{2n} — функции Грина задачи (1[1–4]) для областей $0 \leqslant x \leqslant y_n(t)$, $y_n(t) \leqslant x \leqslant 1$, соответственно. Имеем (в силу $u_{in}(y_n(t), t) = 0$)

$$u_{1n}(x,t) = \int_{t_{0n}}^{t} f_1(\tau)\frac{\partial}{\partial\xi}G_{1n}(x, 0, t, \tau)\,d\tau +$$

$$+ \int_0^{y_n(t_{0n})} u_{11}^*(\xi, t_{0n})\,G_{1n}(x, \xi, t, t_{0n})\,d\xi$$

и аналогичное представление $u_{2n}(x,t)$. Как известно ([6]), G_n и все ее производные при $t>\tau$, $x\neq\xi$ зависят только от $|x-\xi|$, $t-\tau$ и $|dy/dt|$. Возьмем поэтому произвольное $\tau_0>0$ и $N>0$ столь большое, что $t_{0n}<\tau_0$ при $n\geqslant N$. Пусть $t\geqslant\tau_1>\tau$. Поскольку $z_1(\tau_0)<z_1(\tau_1)\leqslant y_n(t)\leqslant z_2(t)<1-\rho$, $|dy_n/dt|<\alpha$, очевидно, что $u_{in}(x,t)$ имеют при $t\geqslant\tau_1$ производные любых порядков по x и t, причем $\left\{\frac{\partial^{k_1+k_2}}{\partial x^{k_1}\partial t^{k_2}}u_{in}(x,t)\right\}$ равномерно ограничены.

Далее,

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x}u_{in}(y_n(t),t)=$$
$$=\frac{\partial^2}{\partial x^2}u_{in}(y_n(t),t)\frac{d}{dt}y_n(t)+\frac{\partial^2}{\partial x\partial t}u_{in}(y_n(t),t).$$

Следовательно, и $\{d^2y_n/dt^2\}$ равномерно ограничены. Но отсюда и из сходимости $\{y_n(t)\}$ очевидно следует дифференцируемость $\bar{y}(t)$. В силу равномерной ограниченности $\left\{\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial x}u_{in}(y_n(t),t)\right\}$ семейство $\left\{\frac{\partial}{\partial x}u_{in}(y_n(t),t)\right\}$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено. Следовательно, существует подпоследовательность $\{u_{in_j}\}$ такая, что $\left\{\frac{\partial}{\partial x}u_{in_j}(y_{n_j}(t),t)\right\}$ сходится равномерно к некоторой непрерывной $v_i(t)$. Но тогда $\{u_{in_j}\}$ сходится к $\bar{\bar{u}}_i(x,t)$ — решению задачи (1^{1-4}) в области, определяемой кривой $x=\bar{y}(t)$, при условии замены требования $\bar{\bar{u}}_i(\bar{y}(t),t)=0$ требованием $\frac{\partial}{\partial x}\bar{\bar{u}}_i(\bar{y}(t),t)=v_i(t)$. В то же время $\{u_{in}(x,t)\}$ сходится к $\bar{u}_i(x,t)$ ([6]). В силу теоремы единственности очевидно, что $\bar{\bar{u}}_i(x,t)\equiv\bar{u}_i(x,t)$. Но отсюда, очевидно, следует, что $\bar{u}_i(x,t)$, $\bar{y}(t)$ действительно осуществляют решение задачи (1^{1-5}).

В заключение заметим, что при построении решения $\bar{y}(t)$ можно исходить из равенства $y(t_{0n})=z_2(t_{0n})$, что приводит к апроксимации $\bar{y}(t)$ не снизу, а сверху. Можно без труда показать, что начальные значения $\frac{\partial}{\partial x}u_i(x,0)$, $\frac{d}{dt}\bar{y}(0)$ определяются однозначно. Вопрос об единственности решения остается, тем не менее, открытым, так же как и вопрос о существовании решения при разрывном задании $f_1(t)$ и $\varphi_2(x)$ в точке $x=0$, $t=0$.

Вологодский государственный педагогический институт им. В. М. Молотова

Поступило 19 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Stefan, Sitzungsber. kais. Akad. Wiss. Wien, Math.-naturw. Geb., 98, IIa, 473 (1889). [2] M. Brillouin, Ann. de l'Institut H. Poincaré, 1, 3, 285 (1931). [3] Л. И. Рубинштейн, ДАН, 58, № 2 (1947); Изв. АН СССР, сер. географ. и геофиз., 11, № 1 (1947). [4] А. Н. Тихонов, Бюлл. МГУ им. Ломоносова, секция А, 1, в. 8 (1938). [5] J. Petrowsky, Compositio Math., 1, 383 (1935). [6] M. Gevrey, J. de Math. pure et appl., sér. 6, 9, 4, 323 (1913).