Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

С. Е. БИРМАН

К ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОМ РАВНОВЕСИИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 13 VII 1948)

Известные уравнения Г. В. Колосова для плоской задачи теории упругости [1] мы будем применять в виде

$$\left.\begin{aligned} X_x + Y_y &= 2R\Phi(z), \quad 2iX_y - X_x + Y_y = 2a\Psi'(z) + 2iy\Phi'(z),\\ 2\mu(u+iv) &= \frac{2k-1}{2}\int\overline{\Phi}(\bar z)\,d\bar z - \frac{1}{2}\int\Phi(z)\,dz + iy\Phi(z) - a\Psi(z).\end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Здесь $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$—функции комплексного переменного, подлежащие определению из условий на контуре; $k=2(1-\sigma)$ при плоской деформации и $k=\frac{2}{1+\sigma}$ при плоском напряженном состоянии; σ — коэффициент Пуассона.

Рассматриваем бесконечную полосу высотой $2a$, начало координат на оси полосы. Пусть две функции комплексного переменного $P(z)$ и $Q(z)$, аналитические в области S бесконечной полосы и принимающие вещественные значения на вещественной оси, таковы, что

$$\left.\begin{aligned} P(x\pm ia) &= r(x)\pm ip(x),\\ Q(x\pm ia) &= q(x)\pm ir(x).\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

Такие две функции мы будем в дальнейшем называть контурно-сопряженными.

Рассмотрим следующие четыре случая напряженного состояния полосы.

1. Положим

$$\Phi(z) = P(z), \quad \Psi(z) = Q(z); \tag{3}$$

тогда из (1) и (2) получим на контуре полосы, т. е. при $y=\pm a$

$$Y_y = \pm[r(x) + ap'(x) + aq'(x)], \quad X_y = 0.$$

2. Положим

$$\Phi(z) = -Q(z), \quad \Psi(z) = P(z) + \frac{1}{a}\int Q(z)\,dz; \tag{4}$$

тогда при $y=\pm a$

$$Y_y = 0, \quad X_y = \pm[r(x) + ap'(x) + aq'(x)].$$

3. Если

$$\Phi(z) = -iQ(z), \quad \Psi(z) = iP(z), \tag{5}$$

то на контуре полосы

$$Y_y = \pm [r(x) - ap'(x) - aq'(x)], \quad X_y = 0.$$

4. Если

$$\Phi(z) = -iP(z), \quad \Psi(z) = -iQ(z) + \frac{i}{a}\int P(z)\,dz, \tag{6}$$

то на контуре

$$Y_y = 0, \quad X_y = \mp [r(x) - ap'(x) - aq'(x)].$$

Таким образом, если внешние силы приложены к контуру полосы симметрично относительно ее оси (случаи 1 и 2), то задача сводится к отысканию таких двух контурно-сопряженных функций, чтобы

$$r(x) + ap'(x) + aq'(x) = f(x), \tag{7}$$

где $f(x)$ представляет заданное напряжение на контуре полосы.

Если внешние силы приложены к контуру обратно-симметрично (случаи 3 и 4), то $P(z)$ и $Q(z)$ должны быть найдены из условия

$$r(x) - ap'(x) - aq'(x) = f(x). \tag{8}$$

Следуя Г. В. Колосову, напишем интеграл Шварца для бесконечной полосы в следующем виде:

$$F(z) = F_1(z) + F_2(z) =$$

$$= \frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_1(t)\,dt}{\operatorname{ch} m(t-z)} - \frac{i}{2a}\operatorname{sh} mz \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f_2(t)\,dt}{\operatorname{ch} mt \operatorname{ch} m(t-z)} + iC\,^{*}, \tag{9}$$

где $f_1(x) + f_2(x)$ — значение вещественной части $F(z)$ на прямой $y = +a$, а $f_1(x) - f_2(x)$ — значение ее на прямой $y = -a$, $m = \pi/2a$.

Если $f_1(x) = f_2(x)$, то из (9) можно получить

$$F_1'(z) - F_2'(z) = \frac{im}{4a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2}(t - z + ia)}$$

и, следовательно, принимая во внимание (2),

$$P'(z) + iQ'(z) = \frac{im}{4a}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2}(t - z + ia)}. \tag{10}$$

---

* Выражение (9) можно найти путем конформного отображения бесконечной полосы на (верхнюю) полуплоскость, преобразуя интеграл $\Phi(\zeta) = -\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\zeta}$ при помощи соотношения $\zeta = ie^{\pi z/2a}$ (во втором члене выражения, данного Г. В. Колосовым ([1], стр. 109, 110), имеется опечатка).

Из (2) и (10) при $z = x - ia$ найдем

$$ap'(x) + aq'(x) = \frac{m}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2}(t-x)}, \tag{11}$$

и, таким образом, (7) можно переписать в виде следующего интегрального уравнения:

$$r(x) + \frac{m}{4} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{r(t)\,dt}{\operatorname{ch}^2 \frac{m}{2}(t-x)} = f(x). \tag{12}$$

Полагая, что $f(x)$ абсолютно интегрируема и удовлетворяет условиям Дирихле, из (12) найдем

$$r(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{sh} 2a\xi\, d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi + 2a\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cos \xi (t-x)\, dt. \tag{13}$$

Теперь из (10) и (13) получим

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi + 2a\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \xi (t - z + ia)\, dt \tag{14}$$

для симметричного загружения полосы.

Аналогично, из (8), (11) и (10) найдем

$$P(z) + iQ(z) = -\frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi - 2a\xi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t) \sin \xi (t - z + ia)\, dt \tag{15}$$

для обратно-симметричного загружения полосы.

Положим, например, что в точках $x = 0$, $y = a$ и $x = 0$, $y = -a$ приложены две сжимающие сосредоточенные силы P. Из (14) находим:

$$P(z) + iQ(z) = \frac{iP}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin \xi (z - ia)\, d\xi}{\operatorname{sh} 2a\xi + 2a\xi}. \tag{16}$$

Внося (16) в (3) и (1), получим решение Файлона [2] и Мелана [3].

Если рассматривать напряжения в сечении $x = 0$ „в смысле Сен-Венана“ и положить, что в этом сечении:

$$X_0' = \int\limits_{-a}^{+a} X_x dy = 0, \quad Y_0 = \int\limits_{-a}^{+a} X_y\, dy = 0, \qquad M_0 = \int\limits_{-a}^{+a} X_x\, y dy = 0,$$

то из (12) и (10) можно получить решение для полуполосы (консоли $|x| < \infty$), когда $f(x) = Ax^n$, n — целое положительное число, в следующем виде:

$$P(z)+iQ(z)=ib_{-1}h^{-1}\int_0^{z-ia}f(t)\,dt-$$

$$-ib_1hf'(z-ia)+ib_3h^3f^{(3)}(z-ia)-\ldots,\quad (h=2a) \qquad (17)$$

при симметричном загружении полосы, и таким же путем

$$P(z)+iQ(z)=-ic_{-3}h^{-3}\int_0^{z-ia}dt\int_0^{t}dt\int_0^{t}f(t)\,dt+ic_{-1}h^{-1}\int_0^{z-ia}f(t)\,dt-$$

$$-ic_1hf'(z-ia)+ic_3h^3f^{(3)}(z-ia)-\ldots \qquad (18)$$

при обратно-симметричном загружении полосы.

Здесь: $b_{-1}=1,\ b_1=-\frac{1}{12},\quad b_3=\frac{1}{360},\ b_5=\frac{1}{60480}\ldots$ (коэффициенты разложения $\frac{2}{\operatorname{sh}x+x}$ в ряд по степеням x); $c_{-3}=12,\ c_{-1}=-\frac{3}{5}$, $c_1=\frac{11}{700},\ c_3=-\frac{17}{63000},\ldots$ (коэффициенты разложения $\frac{2}{\operatorname{sh}x-x}$ в степенной ряд).

Пример. Пусть контур полосы загружен симметрично касательными напряжениями $f(x)=qx^4$. Из (17) имеем:

$$P(z)+iQ(z)=qi\left[\frac{h^{-1}}{5}(z-ia)^5+\frac{h}{3}(z-ia)^3+\frac{h^3}{15}(z-ia)\right];$$

отсюда, применяя (4) и (1), получим

$$Y_y=2qx\left[a(a^2+x^2-2y^2)-\frac{y^2}{a}(x^2-y^2)\right],$$

$$X_x=-qx\left[a\left(\frac{a^2}{15}+\frac{4}{3}x^2-2y^2\right)+\frac{1}{a}\left(\frac{x^4}{5}-4x^2y^2+3y^4\right)\right],$$

$$X_y=qy\left[\frac{1}{a}\left(x^4-4x^2y^2+\frac{3}{5}y^4\right)+a\left(4x^2-\frac{2}{3}y^2+\frac{a^2}{15}\right)\right].$$

Поступило
10 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Г. В. Колосов, Применение комплексной переменной к теории упругости, 1935. [2] L. N. G. Filon, Trans. Roy. Soc., A, **201**, 63 (1903). [3] E. Melan, Beton und Eisen, 1919, S. 83.