Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Р. А. АДАДУРОВ

НАПРЯЖЕНИЯ И ДЕФОРМАЦИИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ЖЕСТКИМИ ПОПЕРЕЧНЫМИ СЕЧЕНИЯМИ

(Представлено академиком Л. С. Лейбензоном 17 VII 1948)

Рассматривается безмоментная цилиндрическая оболочка с замкнутым или открытым контуром поперечного сечения, произвольной формы, подкрепленная по всей длине непрерывно расположенными поперечными диафрагмами. Диафрагмы абсолютно жесткие в своей плоскости и гибкие в перпендикулярном направлении. Вследствие этого поперечные сечения оболочки остаются неизменяемыми в своей плоскости. Ось x направлена параллельно образующим оболочки. Уравнение контура поперечного сечения $y=y(s)$, $z=z(s)$, где s — дуга контура. Произвольная нагрузка, действующая на оболочку, в случае жесткого контура задается крутящими моментами $M_x(x)$, срезающими силами $Q_y(x)$ и $Q_z(x)$, продольной поверхностной нагрузкой $p_x(x, s)$ и нормальными напряжениями $\sigma_x(0, s)$ и $\sigma_x(l, s)$, распределенными по торцам оболочки $x=0$ и $x=l$. Постоянная толщина оболочки принята равной единице. E и G — модули упругости, μ — коэффициент Пуассона.

§ 1. Уравнение равновесия элемента оболочки в проекциях на ось x и зависимости между нормальными напряжениями $\sigma_x(x, s)$, $\sigma_s(x, s)$ и продольными смещениями $u(x, s)$ соответственно имеют вид

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau}{\partial s}=-p_x(x, s),\quad \sigma_x=E^*\frac{du}{dx},\ \sigma_s=\mu\sigma_x,\ \left(E^*=\frac{E}{1-\mu^2}\right). \tag{1}$$

Выражения τ и u, тождественно удовлетворяющие уравнению (1), даются с помощью функции $\Phi(x, s)$:

$$\tau=-\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}-\int_0^s p_x ds+\frac{s}{2p}\int_0^{2p} p_x ds,\quad uE^*=\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\frac{1}{2p}\int_0^x N dx\ \left(N'=-\int_0^{2p} p_x ds\right);\tag{2}$$

$N(x)$ — растягивающая сила и $2p$ — периметр контура.

Смещение по направлению дуги s жесткого контура будет:

$$v(x, s)=\theta(x)\,\omega'(s)+\eta(x)\,y'(s)+\zeta(x)\,z'(s);\tag{3}$$

$\theta(x)$ — угол поворота вокруг оси x; $\eta(x)$ и $\zeta(x)$ — смещения по осям y и z; $\omega(s)$ — удвоенная секториальная площадь с полюсом в начале координат.

Напряжения τ, связанные с внешними нагрузками уравнениями

$$\int_0^{2p}\tau\omega' ds=M_x,\quad \int_0^{2p}\tau y' ds=Q_y,\quad \int_0^{2p}\tau z' ds=Q_z,\tag{4}$$

выражаются через смещения u и v, определенные формулами (2) и (3):

$$\tau = G\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) = \vartheta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} + G(\theta'\omega' + \eta' y' + \zeta' z') \qquad \left(\vartheta^2 = \frac{G}{E^*}\right). \tag{5}$$

Исключая τ, $\theta'(x)$, $\eta'(x)$ и $\zeta'(x)$ из (2), (4) и (5), получим уравнение:

$$D(\Phi) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \vartheta^2 \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} -$$

$$- \frac{\vartheta^2}{\Delta}\left(\omega' \int\limits_0^{2p} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} H_\theta ds + y' \int\limits_0^{2p} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} H_\eta ds + z' \int\limits_0^{2p} \frac{\partial^2\Phi}{\partial s^2} H_\zeta ds\right) = \Psi(x, s); \tag{6}$$

$$\Psi(x, s) = -\frac{1}{\Delta}(M_x H_\theta + Q_y H_\eta + Q_z H_\zeta) - \int\limits_0^s p_x ds + \frac{s}{2p}\int\limits_0^{2p} p_x ds. \tag{7}$$

$H = H(s)$ — функции дуги s, определяемые из уравнений:

$$\begin{gathered} J_\rho H_\theta + K_z H_\eta + K_y H_\zeta = \omega'\Delta, \quad K_z H_\theta + L_z H_\eta + L_{yz} H_\zeta = y'\Delta, \\ K_y H_\theta + L_{yz} H_\eta + L_y H_\zeta = z'\Delta; \end{gathered} \tag{8}$$

$$J_\rho = \int\limits_0^{2p} \omega'^2 ds, \quad L_z = \int\limits_0^{2p} y'^2 ds, \; \ldots, \quad L_{yz} = \int\limits_0^{2p} y'z' ds, \quad K_z = \int\limits_0^{2p} \omega' z' ds, \ldots \tag{9}$$

и Δ — определитель системы уравнений (8):

$$\Delta = J_\rho(L_y L_z - L_{yz}^2) - (L_y K_z^2 - 2L_{yz} K_y K_z + L_z K_y^2). \tag{10}$$

§ 2. Отыскание решения однородного уравнения $D(\Phi) = 0$ в форме $\Phi(x, s) = X(x) S(s)$ приводит к уравнениям:

$$X'' - \vartheta^2\lambda^2 X = 0, \qquad S'' + \lambda^2 S = \frac{1}{\Delta}(T_\theta \omega' + T_\eta y' + T_\zeta z'). \tag{11}$$

Здесь λ — параметр и T — постоянные:

$$T_\theta = \int\limits_0^{2p} S''(s) H_\theta(s) ds, \quad T_\eta = \int\limits_0^{2p} S''(s) H_\eta(s) ds,$$

$$T_\zeta = \int\limits_0^{2p} S''(s) H_\zeta(s) ds. \tag{12}$$

Граничные условия для функций $S(s)$ для замкнутого и открытого контуров, соответственно, будут:

$$S(s + 2p) = S(s), \qquad S(0) = S(2p). \tag{13}$$

Из (11) и (12) следует, что либо $\lambda^2 = 0$, либо

$$\int\limits_0^{2p} S(s)\omega'(s) ds = \int\limits_0^{2p} S(s) y'(s) ds = \int\limits_0^{2p} S(s) z'(s) ds = 0. \tag{14}$$

Решения уравнений (11) при $\lambda = 0$ суть линейные функции x и s и функции $S_\Omega(s)$, $S_{y_0}(s)$ и $S_{z_0}(s)$, удовлетворяющие условиям (13):

$$S_\Omega(s)=\int_0^s \Omega(s)\,ds,\quad S_{y_0}(s)=\int_0^s z_0(s)\,ds,\quad S_{z_0}(s)=\int_0^{2p} y_0(s)\,ds; \tag{15}$$

$$\Omega(s)=\omega_0(s)-\frac{J_{\omega_0 z_0}}{J_{z_0}}y_0(s)-\frac{J_{\omega_0 y_0}}{J_{y_0}}z_0(s)-\frac{S_{\omega_0}}{2p}; \tag{16}$$

$$J_{z_0}=\int_0^{2p} y_0^2\,ds,\ \ldots,\quad J_{\omega_0 z_0}=\int_0^{2p}\omega_0 y_0\,ds,\ \ldots,\quad S_{\omega_0}=\int_0^{2p}\omega_0\,ds. \tag{17}$$

Индексы 0 здесь и далее означают, что соответствующие величины отнесены к главным центральным осям $y_0 z_0$. Для оболочки с замкнутым контуром $S_\Omega(s)=1$.

Решения уравнений (11) при $\lambda\neq 0$:

$$X(x,\lambda)=e^{\pm\vartheta\lambda x},\qquad S(s,\lambda)=\frac{1}{\Delta}(T_\theta\omega^*+T_\eta y^*+T_\zeta z^*). \tag{18}$$

Для замкнутого и открытого контуров функции ω^* при $\lambda\neq\pi m/p$, где $m=1,2,3,\ldots$, будут, соответственно*:

$$\omega^*=\frac{1}{2\lambda\sin\lambda p}\int_s^{s+2p}\omega'(t)\cos\lambda(s+p-t)\,dt, \tag{19}$$

$$\omega^*=\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^s\omega'(t)\sin\lambda(s-t)\,dt-\frac{\sin\lambda s}{\sin 2\lambda p}\int_0^{2p}\omega'(s)\sin\lambda(2p-s)\,ds\right], \tag{20}$$

и аналогично для y^* и z^*.

Внеся значение $S(s,\lambda)$ (18) в уравнение (14), получим

$$\begin{gathered} J_\rho^* T_\theta+K_z^* T_\eta+K_y^* T_\zeta=0,\quad K_z^* T_\theta+L_z^* T_\eta+L_{yz}^* T_\zeta=0,\\ K_y^* T_\theta+L_{yz}^* T_\eta+L_y^* T_\zeta=0. \end{gathered} \tag{21}$$

$$\begin{gathered} J_\rho^*(\lambda)=\int_0^{2p}\omega^*\omega'\,ds,\quad L_z^*(\lambda)=\int_0^{2p}y^*y'\,ds,\ \ldots\\ L_{yz}^*(\lambda)=\int_0^{2p}y^*z'\,ds=\int_0^{2p}z^*y'\,ds,\quad K_z^*(\lambda)=\int_0^{2p}\omega^*y'\,ds=\int_0^{2p}y^*\omega'\,ds,\ \ldots \end{gathered} \tag{22}$$

Система уравнений (21) дает для T значения, отличные от нуля при условии равенства нулю ее определителя $\Delta^*(\lambda)$:

$$\Delta^*(\lambda)=J_\rho^*(L_y^*L_z^*-L_{yz}^{*2})-(L_y^*K_z^{*2}-2L_{yz}^*K_y^*K_z^*+L_z^*K_y^{*2})=0. \tag{23}$$

При этом T определяются с точностью до произвольного множителя, который выбирается так, чтобы функция $S'(s,\lambda)$ была нормированной.

Уравнением (23) определяется бесконечная последовательность собственных чисел λ: $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k,\ldots$ Следовательно, определяется и бесконечная последовательность собственных функций $S_k(s)=S(s,\lambda_k)$. Функции $S_k(s)$ инвариантны по отношению к переносу и повороту осей координат yOz. Системы функций $S_k(s)$ и их производных $S_k'(s)$ в интервале от 0 до $2p$ ортогональны и нормированы:

* Для сечений, имеющих оси симметрии, кроме решений (19) и (20) существуют решения, соответствующие значениям $\lambda=\pi m/p$.

$$\int_0^{2p} S_q S_j ds = \int_0^{2p} S'_q S'_j ds = 0 \ (g \neq j), \quad \int_0^{2p} S'^2_k ds = \lambda_k^2 \int_0^{2p} S_k^2 ds = 1. \tag{24}$$

§ 3. Общее решение неоднородного уравнения (6) имеет вид:

$$\Phi(x, s) = \frac{S_\Omega(s)}{J_\Omega} \int_0^x M_\Omega dx + \frac{S_{y_0}(s)}{J_{y_0}} \int_0^x M_{y_0} dx + \frac{S_{z_0}(s)}{J_{z_0}} \int_0^x M_{z_0} dx + \sum_{k=1}^{\infty} X_k S_k, \tag{25}$$

$$M_\Omega = M_{\omega_0} - \frac{J_{\omega_0 y_0}}{J_{y_0}} M_{y_0} - \frac{J_{\omega_0 z_0}}{J_{z_0}} M_{z_0} - \frac{S_{\omega_0}}{2p} N, \quad J_\Omega = \int_0^{2p} \Omega^2 ds. \tag{26}$$

Для оболочки с замкнутым контуром первое слагаемое в правой части формулы (25) заменяется выражением

$$-\frac{1}{\Omega_{2p}} \int_0^x \left[M_{x_0}(t) - \frac{J_{\omega_0 z_0}}{J_{z_0}} Q_{y_0}(t) - \frac{J_{\omega_0 y_0}}{J_{y_0}} Q_{z_0}(t) - \int_0^{2p} p_x(t, s)\, \Omega(s)\, ds \right] (x-t)\, dt. \tag{27}$$

Здесь, в формулах (25), (26) и (27), Ω_{2p} — удвоенная площадь, ограниченная замкнутым контуром, $M_\Omega(x)$ — главный бимомент, $M_{\omega_0}(x)$, $M_{y_0}(x)$, $M_{z_0}(x)$ — соответственно, бимомент ([1]) и изгибающие моменты относительно главных центральных осей $y_0 z_0$:

$$M_{\omega_0}(x) = \int_0^{2p} \sigma_x \omega_0 ds, \quad M_{y_0}(x) = \int_0^{2p} \sigma_x z_0 ds, \quad M_{z_0}(x) = \int_0^{2p} \sigma_x y_0 ds; \tag{28}$$

$$M'_{\omega_0} = M_{x_0} - \int_0^{2p} p_x \omega_0 ds, \quad M'_{y_0} = Q_{z_0} - \int_0^{2p} p_x z_0 ds, \quad M'_{z_0} = Q_{y_0} - \int_0^{2p} p_x y_0 ds. \tag{29}$$

Функция $X_k(x)$ определяется из уравнения:

$$X''_k - \vartheta^2 \lambda_k^2 X_k = -\int_0^{2p} \Psi S''_k ds = \frac{1}{\Delta}(T_\theta M_x + T_\eta Q_y + T_\zeta Q_z) - \int_0^{2p} p_x S'_k ds. \tag{30}$$

Для составления граничных условий на торцах воспользуемся тем, что выражение (25) есть разложение $\Phi(x, s)$ в ряд по функциям $S_\Omega(s)$, $S_{y_0}(s)$, $S_{z_0}(s)$ и $S(s, \lambda_k)$, поэтому:

$$X_k(x) = -\int_0^{2p} \Phi S''_k ds = E^* \int_0^{2p} u S'_k ds \quad \text{или} \quad X'_k(x) = \int_0^{2p} \sigma_x S'_k ds. \tag{31}$$

На каждом из торцов могут быть заданы либо продольные смещения, либо нормальные напряжения. Поэтому, используя (31), получим граничные условия для функций $X_k(x)$:

$$X_k(0) = E^* \int_0^{2p} u(0, s) S'_k ds \quad \text{и} \quad X'_k(0) = \int_0^{2p} \sigma_x(0, s) S'_k ds, \tag{32}$$

и аналогично для торца $x = l$.

Формулами (32) исчерпывается решение поставленной задачи.

Поступило
28 IV 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. З. Власов, Тонкостенные упругие стержни, 1940.