Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

И. А. ЯКОВЛЕВ

ЗАДАЧА АДАМАРА И СВЯЗЬ МЕЖДУ УРАВНЕНИЯМИ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА В ПРОСТРАНСТВАХ ПОСТОЯННОЙ КРИВИЗНЫ

(Представлено академиком В. И. Смирновым 5 VII 1948)

В 1923 г. Адамар [1] поставил задачу: „Указать все уравнения гиперболического типа, для которых выполняется принцип Гюйгенса" (т. е. характеризующих распространение возмущений без диффузии). Он показал, что всякое уравнение гиперболического типа с нечетным числом переменных есть уравнение „с диффузией" и высказал гипотезу, что все уравнения без диффузии сводятся к волновому уравнению следующими преобразованиями:

$$\left.\begin{array}{l} \text{1) умножением уравнения на произвольную функцию } f(x_1, x_2, \ldots, x_n); \\ \text{2) заменой неизвестной функции } u = \lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n)v; \\ \text{3) заменой независимых переменных.} \end{array}\right\} \qquad \text{(A)}$$

В 1939 г. Матиссон [2] доказал, что из уравнений вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}\right) + \sum_{\alpha=0}^{3} B_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + Cu = 0 \qquad (1)$$

уравнениями без диффузии являются лишь волновое уравнение и сводящиеся к нему преобразованиями 1), 2) и преобразованием Лоренца.

В настоящей заметке доказывается верность гипотезы Адамара для пространств постоянной кривизны.

Используем теорему, доказанную Олевским [3]:

Среднее значение $M(u;\, p,\, s)$ всякой дважды непрерывно дифференцируемой функции $u(x_1, x_2, x_3)$ по квазисфере $F_s(p)$ геодезического радиуса s с центром в точке $p(x_1^0, x_2^0, x_3^0)$ (в смысле метрики пространства постоянной кривизны k) удовлетворяет уравнению:

$$\Delta^2 M - \frac{\partial^2 M}{\partial s^2} = 2\sqrt{k}\,\mathrm{ctg}\sqrt{k}\, s\, \frac{\partial M}{\partial s}, \qquad (2)$$

где $\Delta^2 M$ — второй дифференциальный параметр Бельтрами, и начальным условиям:

$$M\Big|_{s=0} = u(x_1^0,\ x_2^0,\ x_3^0); \qquad \frac{\partial M}{\partial s}\Big|_{s=0} = 0. \qquad (3)$$

Легко показать, что задача Коши для уравнения:

$$\Delta^2 u - ku = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{4}$$

с начальными условиями:

$$u\Big|_{t=0} = u_0(x_1,\ x_2,\ x_3); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1(x_1,\ x_2,\ x_3) \tag{5}$$

имеет решение вида:

$$u = \frac{\sin\sqrt{k}t}{\sqrt{k}} M(u_1;\ p,\ t) + \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{\sin\sqrt{k}\,t}{\sqrt{k}} M(u_0;\ p,\ s)\right]. \tag{6}$$

В этой формуле интегрирование производится по поверхности квазисферы $F_t(p)$ и, таким образом, начальное возмущение, локализованное в окрестности точки p, распространяется в виде поверхностного слоя, содержащего внутри квазисферу $F_t(p)$. Следовательно, для уравнения (4) выполняется принцип Гюйгенса, и оно является уравнением без диффузии.

Покажем, что уравнение (4) сводится к волновому уравнению преобразованиями (A).

Уравнение (4) в полярных координатах имеет вид:

$$\left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)^2\left\{\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} + \left[\frac{2}{\rho} - \frac{k\rho}{2\left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)}\right]\frac{\partial u}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\Lambda u\right\} - ku - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} = 0, \tag{7}$$

где оператор

$$\Lambda u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \operatorname{ctg}\vartheta\,\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}$$

не зависит от ρ и не меняется при дальнейших преобразованиях.

Волновое уравнение в полярных координатах имеет вид:

$$\Box v \equiv \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\Lambda v - \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0. \tag{8}$$

Так как пространства постоянной кривизны изотропны, то естественно искать преобразование уравнения (7) в уравнение (8), зависящее лишь от r и t.

Тогда задача сведется к решению системы уравнений:

$$\begin{aligned}
&\text{а)}\quad \left(\frac{\partial\rho}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 = \left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)^2 F(r,t),\\
&\text{б)}\quad \left(\frac{\partial\tau}{\partial r}\right)^2 - \left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)^2 = -F(r,t),\\
&\text{в)}\quad \frac{\partial\rho}{\partial r}\frac{\partial\tau}{\partial r} - \frac{\partial\rho}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial t} = 0,\\
&\text{г)}\quad \Box\rho + 2\frac{\partial\log\lambda}{\partial r}\frac{\partial\rho}{\partial r} - 2\frac{\partial\log\lambda}{\partial t}\frac{\partial\rho}{\partial t} =\\
&= \left[\frac{2}{\rho} - \frac{k\rho}{2\left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)}\right]\left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)F(r,t),
\end{aligned} \tag{9}$$

д) $\square\tau+2\frac{\partial\log\lambda}{\partial r}\frac{\partial\tau}{\partial r}-2\frac{\partial\log\lambda}{\partial t}\frac{\partial\tau}{\partial t}=0,$

е) $\square\lambda=-k\lambda F(r,t),$

ж) $\frac{1}{r^2}=\frac{\left(1+\frac{k}{4}\rho^2\right)^2}{\rho^2}F(r,t).$

Решение этой системы различно при $k<0$ и при $k>0$. В случае $k=-\alpha^2<0$ решение имеет вид:

$$\rho=\frac{2}{\alpha}\frac{t\pm\sqrt{t^2-r^2}}{r},\qquad \tau=\frac{1}{2\alpha}\ln(t^2-r^2),$$

$$F=\frac{1}{\alpha^2(t^2-r^2)},\qquad \lambda=\sqrt{t^2-r^2}.$$

Следовательно, уравнение (4) сводится к волновому уравнению преобразованием

$$u=\sqrt{t^2-r^2}\,v=e^{\alpha\tau}v,\qquad r=\frac{\alpha\rho}{1-\frac{\alpha^2}{4}\rho^2}e^{\alpha\tau},$$

$$t=\frac{1+\frac{\alpha^2}{4}\rho^2}{1-\frac{\alpha^2}{4}\rho^2}e^{\alpha\tau},\qquad F=\frac{1}{\alpha^2}e^{-2\alpha\tau}. \tag{10}$$

Это преобразование является лишь некоторым обобщением преобразования, указанного С. Л. Соболевым [4] для случая $k=-4$.

Для пространств положительной кривизны $k=\alpha^2>0$ решения системы (9) суть:

$$\rho=\frac{2}{\alpha}\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2+t^2}\right],\qquad \tau=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{1+r^2-t^2},$$

$$\lambda=\frac{1}{r}\sin\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{2r}{1-r^2+t^2}\right]=\frac{1}{r}\frac{\alpha\rho}{1+\frac{\alpha^2}{4}\rho^2},$$

$$F=\frac{4}{\alpha^2[1+(r-t)^2][1+(r+t)^2]},$$

и, следовательно, преобразование, сводящее уравнение (4) к волновому уравнению, имеет вид:

$$u=\frac{\sqrt{(1-r^2+t^2)^2+4r^2}}{2}v,\qquad \rho=\frac{\sqrt{(1-r^2+t^2)^2+4r^2}-1+r^2-t^2}{\alpha r},$$

$$\tau=\frac{1}{\alpha}\operatorname{arc\,tg}\frac{2t}{1+r^2-t^2},\qquad F=\frac{4}{\alpha^2[1+(r-t)^2][1+(r+t)^2]}. \tag{11}$$

Теперь легко доказать теорему:

Всякое уравнение без диффузии в пространствах постоянной кривизны сводится к волновому уравнению преобразованиями (А).

Действительно, пусть дано уравнение:

$$\Delta^2 u+\sum_{\alpha=0}^{3}B_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+Cu-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0, \tag{12}$$

где $\Delta^2 u$ — второй дифференциальный параметр Бельтрами пространства постоянной кривизны k. (Случай, когда $k=0$, изучен в работе Матиссона [2].) В зависимости от знака k проделаем преобразование (10) или (11). Тогда уравнение (12) преобразуется к виду:

$$\Box v + \sum_{\alpha=0}^{3} \bar{B}_\alpha \frac{\partial v}{\partial y_\alpha} + \bar{C} v = 0. \tag{13}$$

В работе Матиссона [2] доказано, что уравнение (13) тогда и только тогда является уравнением без диффузии, когда оно сводится к волновому уравнению преобразованиями (A), причем в евклидовом пространстве показана единственность этого класса уравнений без диффузии. Но так как любое уравнение (12) может быть преобразовано к виду (13) и при этом его свойство быть уравнением без диффузии или с диффузией сохраняется, то, следовательно, в пространствах постоянной кривизны единственным классом уравнений без диффузии является класс уравнений, сводящихся к волновому преобразованиями (A).

Таким образом, гипотеза Адамара доказана для трехмерных пространств постоянной кривизны.

Ленинградская военно-воздушная
инженерная академия

Поступило
2 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. Hadamard, Lectures on Cauchy's Problem, 1923. [2] M. Mathisson, Acta Math., 71 (1939). [3] М. Н. Олевский, ДАН, 45, № 3 (1944). [4] С. Л. Соболев, Матем. сб., 11 (53), № 3 (1942).