Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. А. ШЕСТАКОВ

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ КРИВЫХ СИСТЕМЫ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОКРЕСТНОСТИ ОСОБОЙ ТОЧКИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 5 VII 1948)

§ 1. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений вида

$$dx_1/dt=F_1(x_1), \quad dx_i/dt=F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad i=2, 3, \ldots, n, \tag{1}$$

и пусть точка O $(x_1=x_2=\ldots=x_n=0)$ является изолированной особой точкой системы (1).

Правые части системы (1) — голоморфные функции переменных в n-мерной сферической окрестности S_r^+: $\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$, $x_1>0$, достаточно малого радиуса r, имеющие следующие разложения в ряды Тейлора:

$$F_1(x_1)=\sum_{i=m}^{\infty} c_i x_1^i, \quad F_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j+X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \tag{2}$$

$$i=2, 3, \ldots, n,$$

причем разложения функций X_i начинаются с членов порядка >1. Уравнение $(n-1)$-й степени относительно λ

$$|a_{ij}-\delta_{ij}\lambda|=0, \quad \delta_{ii}=1, \quad \delta_{ij}=0 \text{ при } i\neq j, \quad i, j=2, 3, \ldots, n, \tag{3}$$

назовем „укороченным“ характеристическим уравнением системы (1).

Если корни уравнения (3) λ_i имеют отличные от нуля вещественные части $\mathrm{Re}(\lambda_i)$, то характер особой точки O определяется знаком числа c_m, четностью целого числа m и корнями „укороченного“ характеристического уаавнения (3).

§ 2. Пусть уравнение (3) имеет $k-1$ корней с положительной вещественной частью и $n-k$ корней с отрицательной вещественной частью: $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$, $i=1, 2, \ldots, k-1$; $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$, $i=k, k+1, \ldots$ $\ldots, n-1$. Для определенности предположим, что $c_m>0$.

Теорема 1. *Для любой системы k чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_k^0$ $(x_1^0>0)$, абсолютные значения которых достаточно малы, существует единственная система $n-k$ чисел $x_{k+1}^0, x_{k+2}^0, \ldots, x_n^0$, обладающая тем свойством, что через точку $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ n-мерного пространства проходит 0-кривая системы (1), примыкающая к особой точке при $t\to-\infty$.*

Доказательство. Ограничимся рассмотрением случая, когда элементарные делители матрицы $\|a_{ik}-\lambda E\|$, где E — единичная матрица, простые. Известно, что путем линейной подстановки система (1) может быть приведена к виду

$$dx_1/dt = X_1(x_1), \quad dx_i/dt = a_i x_1 + \lambda_{i-1} x_i + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n), \quad (1')$$
$$i = 2, 3, \ldots, n.$$

Нетрудно убедиться, что решение $x_i(x_1)$, $i = 2, 3, \ldots, n$, системы (1') при начальных условиях

$$x_i(x_1^0) = x_i^0, \quad x_j(0) = 0, \quad i = 2, 3, \ldots, k, \quad j = k+1, \ldots, n, \tag{4}$$

удовлетворяет системе интегральных уравнений:

$$\begin{gathered} x_i(x_1) = x_i^0 \exp \lambda_{i-1}(\varphi(x_1^0) - \varphi(x_1)) - \\ - \exp - \lambda_{i-1}\varphi(x_1) \int\limits_{x_1}^{x_1^0} \frac{a_i x_1 + X_i(x_1 - x_n)}{X_1(x_1)\exp - \lambda_{i-1}\varphi} dx_1, \\ i = 2, 3, \ldots, k; \\ x_j(x_1) = \exp - \lambda_{j-1}\varphi(x_1) \int\limits_0^{x_1} \frac{a_i x_1 + X_j(x_1, \ldots, x_n)}{X_1(x_1)\exp - \lambda_{j-1}\varphi(x_1)} dx_1, \quad j = k+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{5}$$

Следуя О. Перрону [1] и И. Г. Петровскому [2], систему (5) решаем методом последовательных приближений. Последовательные приближения

$$x_i^0(x_1) \equiv 0, \quad x_i^{(1)}(x_1), \; x_i^{(2)}(x_1), \; \ldots, \; x_i^{(k)}(x_1), \; \ldots, \quad i = 2, 3, \ldots, n,$$

определяем при помощи формул

$$\begin{gathered} x_i^{(n)} = x_i^0 \exp \lambda_{i-1}(\varphi(x_1^0) - \varphi(x_1)) - \\ - \exp - \lambda_{i-1}\varphi(x_1) \int\limits_{x_1}^{x_1^0} \frac{a_i x_1 + X_i(x_1, x_2^{(n-1)}, \ldots, x_n^{(n-1)})}{X_1(x_1)\exp - \lambda_{i-1}\varphi} dx_1, \\ x_j^{(k)} = \exp - \lambda_{j-1}\varphi(x_1) \int\limits_0^{x_1} \frac{a_j x_1 + X_j(x_1, x_2^{(k-1)}, \ldots, x_n^{(k-1)})}{X_1(x_1)\exp - \lambda_{j-1}\varphi(x_1)} dx_1, \\ i = 2, 3, \ldots, k, \quad j = k+1, \ldots, n. \end{gathered} \tag{6}$$

Введем сокращения:

$$A = \max\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|, \quad B = \max\left|\frac{a_i x_1 + X_i(x_1, 0, \ldots, 0)}{x_1}\right|,$$
$$i = 2, 3, \ldots, n, \quad j = 2, 3, \ldots, n, \quad x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 \leqslant \rho^2, \quad x_1 > 0.$$

Число $\rho > 0$ выберем так, чтобы выполнялись неравенства

$$\frac{A}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|} < \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Пусть далее a и b два положительные числа, определенные соотношениями:

$$1 > a > \max\left\{\frac{nA}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}\right\}, \quad b > \max\left\{\frac{B}{|\operatorname{Re}(\lambda_i)|}\right\}, \quad i=1, 2, \ldots, n-1.$$

Сферическая окрестность S_r^+ удовлетворяет условию теоремы 1, если $0 < r < \frac{1-a}{1+b}\rho$.

Доказывается далее, что последовательные приближения $x_i^{(k)}(x_1)$ непрерывны на сегменте $0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0$ и удовлетворяют условиям:

$$|x_i^{(n)}(x_1)| < \rho, \quad |x_i^{(n)}(x_1) - x_i^{(n-1)}(x_1)| < a\,|x_i^{(n-1)}(x_1) - x_i^{(n-2)}(x_1)|,$$
$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_1^0 < r, \quad i=2, 3, \ldots, n. \tag{7}$$

Из соотношения (7) следует равномерная сходимость последовательных приближений:

$$x_i^*(x_1) = \lim_{k\to\infty} x_i^{(k)}(x_1), \quad i=2, 3, \ldots, n.$$

Предельные функции $x_i^*(x_1)$, $i=2, 3, \ldots, n$, являются решением системы (5) и (1′) и удовлетворяют соотношениям:

$1°.\ \lim\limits_{x_1\to+0} x_i^*(x_1) = 0, \quad i=2, 3, \ldots, n. \qquad 2°.\ x_i^*(x_1^0) = x_i^0, \quad i=2, 3, \ldots, k.$

Доказательство единственности решения $x_i^*(x_1)$ мы опустим.

§ 3. Система (1) имеет следующие типы особых точек:

I. Узел. Все интегральные системы (1) являются 0-кривыми.

Этот тип особой точки имеет место при

1) $m = 2n+1$, $c_m < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (устойчивый узел);

2) $m = 2n+1$, $c_m > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n-1$ (неустойчивый узел).

II. Обобщенное седло 1-го рода. Полусфера $S_r^+: \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$ $(x_1 > 0)$ имеет k-мерную 0-поверхность, полусфера $S_r^-: \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$ $(x_1 < 0)$ имеет $n-k+1$-мерную 0-поверхность (случай 3), или полусфера S_r^+ имеет $n-k+1$-мерную 0-поверхность, полусфера S_r^{-1} имеет k мерную 0-поверхность (случай 4). Все остальные интегральные кривые сферы S_r $(x_1 \neq 0)$ являются седловыми кривыми. Особая точка O на плоскости $x_1 = 0$ является седлом 1-го рода: $n-1$-мерная сфера C_r: $\sum\limits_{i=2}^{n} x_i^2 \leqslant r^2$ имеет две ортогональные гиперплоскости измерений $k-1$ и $n-k$, заполненные интегральными кривыми, примыкающими к O соответственно при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$. Все другие интегральные кривые сферы C_r являются седловыми кривыми.

Этот тип особой точки имеет место при

3) $m = 2n$, $c_m > 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = k, \ k+1, \ldots, n-1$;

4) $m = 2n$, $c_m < 0$, $\operatorname{Re}(\lambda_i) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$; $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, $j = k, \ k+1, \ldots, n-1$.

III. Обобщенное седло 2-го рода. Полусферы S_r^+ и S_r^- имеют 0-поверхности одной и той же размерности: k (случай 5) или

$n-k+1$ (случай 6). Все остальные интегральные кривые сферы S_r ($x_1 \neq 0$) являются седловыми кривыми. На плоскости $x_1=0$ точка O — седло 1-го рода (см. случай II).

Этот тип особой точки имеет место при

5) $m=2n+1$, $c_m>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$, $i=1, 2, \ldots, k-1$; $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$, $j=k, k+1, \ldots, n-1$;

6) $m=2n+1$, $c_m<0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$, $i=1, 2, \ldots, k-1$; $\mathrm{Re}(\lambda_j)<0$, $j=k, k+1, \ldots, n-1$.

IV. Обобщенное седло 3-го рода. Сфера S_r ($x_1 \neq 0$) заполнена седловыми кривыми, за исключением двух 0-кривых, примыкающих к O, соответственно, при $x_1 \to +0$ и $x_1 \to -0$. Плоскость $x_1=0$ заполнена 0-кривыми, примыкающими к O при $t \to +\infty$ (случай 7) или $t \to -\infty$ (случай 8).

Этот тип особой точки имеет место при

7) $m=2n+1$, $c_m>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$, $i=1, 2, \ldots, n-1$;

8) $m=2n+1$, $c_m<0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$, $i=1, 2, \ldots, n-1$.

V. Седло-узел. Все интегральные кривые полусферы S_r^+ являются 0-кривыми, полусферы S_r^- — седловыми кривыми, за исключением одной 0-кривой (случаи 9 и 12), или наоборот (случаи 10 и 11). Точка O на плоскости $x_1=0$ является узлом.

Этот тип особой точки имеет место при

9) $m=2n$, $c_m>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$;

10) $m=2n$, $c_m<0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)>0$;

11) $m=2n$, $c_m>0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$;

12) $m=2n$, $c_m<0$, $\mathrm{Re}(\lambda_i)<0$.

§ 4. Система $n-1$ уравнений относительно $x_2, x_3, \ldots, x_n$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)=0, \quad i=2, 3, \ldots, n, \tag{8}$$

определяет, на основании теоремы Юнга ([3]), в достаточно малой окрестности S_r аналитическое решение $u_i(x_1)$, $i=2, 3, \ldots, n$, равное нулю при $x_1=0$. Пусть k_i — угловые коэффициенты кривой (8)

$$du_i/dx_1 = k_i \text{ при } x_1=0, \quad k=\max\{k_i\}, \quad k \neq 0. \tag{9}$$

Тогда имеет место следующая

Теорема 2. *Если корни λ_j уравнения* (3) *вещественны и отрицательны, то 0-кривые системы* (1) *при $m \geqslant 2$ являются правильными 0-кривыми и примыкают к особой точке по направлению, определяемому числами k_i, $i=2, 3, \ldots, n$.*

Научно-исследовательский институт математики
Московского государственного университета
им. М. В. Ломоносова

Поступило
1 XII 1947

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] O. Perron, Math. Ann., 75, 256 (1914). [2] И. Г. Петровский, Матем. сб., 41, 1, 107 (1934). [3] Валле-Пуссен, Курс анализа бесконечно малых, 1933, стр. 162.