Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

А. В. ПОГОРЕЛОВ

ОДНА ОБЩАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНЫХ ВЫПУКЛЫХ МНОГОГРАННИКОВ

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 2 VII 1948)

Пусть $\bar{n}_1, \bar{n}, \ldots, \bar{n}_k$ — система k векторов n-мерного евклидова пространства, направленных в полупространство $x_n > 0$. Эту систему векторов мы будем называть выпуклой, если никакой вектор $\bar{n}_s$ не может быть представлен в виде линейной комбинации с неотрицательными коэффициентами остальных векторов системы.

Если $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$ — выпуклая система векторов и $k \geqslant n$, то совокупность точек x вида

$$\bar{x} = \lambda_1 \bar{n}_1 + \lambda_2 \bar{n}_2 + \ldots + \lambda_k \bar{n}_k,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ — любые неотрицательные числа, заполняет некоторый n-мерный телесный угол; этот угол мы обозначим V.

Пусть ω — неотрицательная непрерывная функция, определенная для всех $(n-1)$-мерных выпуклых многогранников, удовлетворяющая условиям:

1) если многогранники Q_1 и Q_2 равны и параллельно расположены, то $\omega(Q_1) = \omega(Q_2)$;

2) если многогранник Q_1 является частью многогранника Q_2, то $\omega(Q_1) < \omega(Q_2)$;

3) если объем многогранника Q равен s, то $c_1(s) < \omega(Q) < c_2(s)$, причем $c_2(s) \to 0$, когда $s \to 0$, а $c_1(s) \to \infty$, когда $s \to \infty$.

Теорема. *Пусть $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$ $(k \geqslant n)$ — выпуклая система единичных векторов; $l_1, l_2, \ldots, l_m$ — система полупрямых, проходящих внутри угла V; $h_1, h_2, \ldots, h_k$ — любые действительные числа и $p_1, p_2, \ldots, p_m$ — числа большие нуля.*

Существует, и притом единственный, многогранник П, бесконечные грани которого имеют направления векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$, конечные имеют направления полупрямых $l_1, l_2, \ldots, l_m$; значения опорной функции $H(\bar{n})$ многогранника для векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$ равны $h_1, h_2, \ldots, h_k$, а значения функции ω для граней направления $l_1, l_2, \ldots, l_m$ равны $p_1, p_2, \ldots, p_m$.

Доказательство. Множество точек $\bar{x}$, удовлетворяющих неравенствам $\bar{x}\bar{n}_s \leqslant h_s$ $(s = 1, 2, \ldots, k)$, образуют бесконечный выпуклый многогранник $\underline{Q}$, его грани бесконечны и имеют направления векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$. Значения опорной функции H многогранника Q для векторов $\bar{n}_1, \bar{n}_2, \ldots, \bar{n}_k$ соответственно равны $h_1, h_2, \ldots, h_k$.

Проведем плоскость, перпендикулярную полупрямой l_1, не пересекающую многогранника Q. Это возможно, так как l_1 проходит внутри угла V. Будем смещать построенную плоскость вниз (т. е. в направлении $x_n < 0$) параллельно самой себе. В некоторый момент плоскость станет в положение опорной плоскости многогранника Q, после чего будет пересекать его. Значение функции ω для $(n-1)$-мерного многогранника — пересечения многогранника Q и движущейся плоскости — монотонно непрерывно растет и может достигнуть любой величины. Поэтому в некотором положении плоскости π' это значение будет равно p_1. Бесконечный многогранник, который отсекает плоскость π' от многогранника Q, обозначим Q_1.

С многогранником Q_1 и плоскостью, перпендикулярной l_2, проделаем ту же операцию. Таким образом мы получим многогранник Q_2.

После этого аналогично строим многогранники $Q_3, Q_4, \ldots, Q_m$. Затем построение повторяем сначала с той лишь разницей, что вместо многогранника Q берем Q_m.

Продолжая это построение неограниченно, мы получим последовательность выпуклых многогранников $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r, \ldots$, причем каждый следующий является частью предыдущего, именно, многогранник Q_r получается отрезанием некоторой части от многогранника Q_{r-1} плоскостью одного из направлений $l_1, l_2, \ldots, l_m$.

Все эти плоскости находятся на конечном расстоянии от начала координат, ибо, если бы среди них были как угодно удаленные, то среди многогранников Q_r нашлись бы многогранники со сколь угодно большими гранями какого-нибудь направления l_s, но тогда значение функции ω для этой грани было бы как угодно велико; вместе с тем ясно, что для каждого многогранника Q_r значение функции ω для грани, перпендикулярной l_s, не больше p_s.

Последовательность многогранников $Q_1, Q_2, \ldots, Q_r, \ldots$ сходится к некоторому многограннику П, который, как нетрудно убедиться, удовлетворяет условиям теоремы.

Покажем теперь, что многогранник П определяется единственным образом.

Допустим, существуют два многогранника $П_1$ и $П_2$, удовлетворяющие условиям теоремы. Обозначим H_1 и H_2 их опорные функции и Ω — связное множество векторов $\bar{n}$ из угла V, для которых $H_1(\bar{n}) - H_2(\bar{n}) > 0$ (или < 0).

Рассмотрим функцию $\varphi(\bar{n})$, определенную для векторов из Ω равенством:

$$\varphi(\bar{n}) = \frac{1}{H_1(\bar{n}) - H_2(\bar{n})}.$$

Интерпретируем функцию $\varphi(\bar{n})$ геометрически, ставя в соответствие значению ее $\varphi(\bar{n})$ конец вектора $\bar{n}\varphi(\bar{n})$. Геометрическое место этих точек есть многогранник R, его край находится в бесконечности, вершины на полупрямых $l_1, l_2, \ldots, l_m$ или на их продолжении, весь многогранник R лежит либо в угле V, либо в его зеркальном изображении относительно начала координат, вне шара радиуса

$$r = \inf\left|\frac{1}{H_1(n) - H_2(n)}\right|.$$

Благодаря такому расположению многогранника R существует плоскость π, не проходящая через начало координат, содержащая только одну вершину многогранника, причем весь многогранник R лежит со стороны, противоположной той, где начало координат.

Подвергнем многогранник R и плоскость π преобразованию инверсии относительно единичного шара с центром в начале координат. При этом плоскость π перейдет в сферу σ, проходящую через начало координат, а точки многогранника перейдут во внутренние точки шара, кроме вершины, которая лежала в плоскости π. Обозначим единичный вектор, направленный в эту точку, $\bar{n}_0$, а вектор, конец которого в центре шара σ, $\bar{a}$.

Имеем

$$H_1(\bar{n}) - H_2(\bar{n}) \leqslant 2\bar{a}\bar{n} \tag{*}$$

для всех векторов $\bar{n}$, принадлежащих Ω, причем равенство достигается только в том случае, когда $\bar{n} = \bar{n}_0$.

Параллельным переносом многогранника Π_2 можно добиться того, что неравенство (*) перейдет в неравенство

$$H_1(\bar{n}) - H_2'(\bar{n}) \leqslant 0, \tag{**}$$

где $H'(\bar{n})$ — опорная функция многогранника Π_2 после переноса.

Из неравенства (**) следует, что грань направления $\bar{n}_0$ ($\bar{n}_0$ лежит на одной из полупрямых l_s) многогранника Π_1 можно поместить внутрь соответствующей грани многогранника Π_2, что невозможно, ибо значения функции ω для этих граней в этом случае не будут равны. Мы пришли к противоречию.

Теорема доказана.

Поступило
I VII 1948