Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

С. Н. МЕРГЕЛЯН

О НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ НА ЗАМКНУТЫХ МНОЖЕСТВАХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 2 VII 1948)

1. Пусть D — конечная область, граница которой является одновременно полной границей дополнения к D. Через B_t $(t \in \overline{D} - D)$ обозначим произвольную подобласть D, обладающую тем свойством, что отношение расстояния любой точки B_t до t к расстоянию той же точки до границы D ограничено сверху для всех точек $\overline{B}_t$.

Класс функций, регулярных в какой-либо области G, k-я производная которых удовлетворяет в $\overline{G}$ условию Липшица порядка α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, обозначим $L(G; K + \alpha)$. Под модулем непрерывности $\omega(\delta)$ функции $f(z)$ в $\overline{D}$ понимаем $\sup |f(z') - f(z'')|$ относительно любых точек $z' \in \overline{D}$, $z'' \in \overline{D}$, которые можно соединить спрямляемой кривой, по длине не превышающей δ и расположенной в $\overline{D}$; соответствующий смысл имеет и удовлетворение условию Липшица. Нижнюю грань чисел

$$\max_{z \in \overline{D}} |f(z) - P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени $\leqslant n$ обозначим

$$\rho_n = \rho_n(D; f).$$

В заметке [1] мы привели несколько оценок ρ_n для гладких областей и областей с угловыми и входящими точками.

В настоящей заметке приводится ряд результатов, относящихся к изучению связи между ρ_n, D и $f(z)$ для случая, когда D представляет произвольную область класса Каратеодори или замкнутое разрывное множество.

Через $d(t; r)$ обозначим расстояние граничной точки t до образа окружности $|w| = r > 1$ при конформном отображении $|w| > 1$ на дополнение к $\overline{D}$.

Теорема 1. *Если*

$$\liminf_{n \to \infty} \frac{\ln \rho_n}{\ln d\left(t; 1 + \frac{1}{n}\right)} = A$$

и $A < \infty$, то при всяком $\varepsilon > 0$ $f(z) \in L(D; A - \varepsilon)$; если же $A = \infty$, то $f(z)$ неограниченно дифференцируема в $\overline{B}_t$.

Следствие. Таким образом, произвольно медленная скорость приближения ρ_n обеспечивает неограниченную дифференцируемость функции $f(z)$ в некоторых граничных точках, если только область расположена соответствующим образом около этих точек.

В случае, когда $A=0$, функция $f(z)$ может быть недифференцируемой и не удовлетворяет никакому условию Липшица положительного порядка, однако ее модуль непрерывности $\omega(\delta)$ в $\bar{B_t}$ удовлетворяет неравенству

$$\omega(\delta)<C\min_{n\geqslant 1}\left\{\rho_n+\frac{\delta}{d\left(t;1+\frac{1}{n}\right)}\right\}. \tag{1}$$

Можно показать, что для любой области D существует функция $f(z)$, для которой оценка (1) порядка $\omega(\delta)$ является точной, т. е.

$$C_1\min_{n>1}\left\{\rho_n+\frac{\delta}{d\left(t;1+\frac{1}{n}\right)}\right\}<\omega(\delta)<C_2\min_{n>1}\left\{\rho_n+\frac{\delta}{d\left(t;1+\frac{1}{n}\right)}\right\}.$$

В случае $A=\infty$ обозначим

$$M_n=\max_{z\in\bar{B}_t}|f^{(n)}(z)|.$$

Теорема 2. *Для любых целых чисел $n_1<n_2<\ldots$ и μ, $0<\mu<1$*

$$M_n<C^n n!\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\rho_{n_k}^{\mu}}{\left[d\left(t;1+\frac{1-\mu}{n_{k+1}}\ln\frac{1}{\rho_{n_k+1}}\right)\right]^n}, \tag{2}$$

где C зависит от d и $\{\rho_n\}$.

Отсюда следует, что, какова бы ни была область D и точка t, если $\rho_n<q^n$ $(q<1)$, то $M_n<C^n n!$, т. е. $f(z)$ аналитична в t; если же ρ_n убывают медленнее любой геометрической прогрессии, то $M_n<C_n^n n!$, где $C_n\to+\infty$ тем медленнее, чем ближе скорость убывания чисел ρ_n к скорости убывания чисел, составляющих какую-либо геометрическую прогрессию.

Из неравенства (2) следует, что для сколь угодно медленной скорости убывания ρ_n соответствующая структура области может гарантировать неравенство $M_n<C_n^n n!$ для любых возрастающих к $+\infty$ чисел C_n.

Теорема 3. *Для любой функции $\varphi(n)>0$, удовлетворяющей при всяком $k>1$ условию*

$$\lim_{n\to\infty}k^n\varphi(n)=\infty,$$

и любой конечной области D, совпадающей с множеством внутренних точек своего замыкания, существует функция $f(z)$, регулярная в D, непрерывная в $\overline{D}$, так что

$$\rho_n(D;f)<\varphi(n),$$

однако граница D является купюрой для $f(z)$.

2. Пусть E — замкнутое, нигде не плотное множество, не разбивающее плоскость, а $f(z)$ — произвольная определенная и непрерывная на E функция. Согласно известной теореме Лаврентьева, всегда $\rho_n(E;f)\to 0$, где $\rho_n(E;f)$ означает нижнюю грань

$$\max_{z \in E} |f(z) - P_n(z)|$$

по всевозможным полиномам степени $\leqslant n$.

Скорость убывания чисел ρ_n зависит как от свойств $f(z)$ на E, так и от множества E.

Теорема 4. *Пусть $M(r) > 0$ — произвольная функция, растущая к ∞ при $r \to \infty$ быстрее любой степени аргумента, т. е. при всяком $N > 0$*

$$\lim_{r \to \infty} \frac{M(r)}{r^N} = \infty,$$

и E — бесконечное множество. Существует положительная функция $\varphi(n)$ такая, что из неравенства

$$\rho_n(E, f) < \varphi(n)$$

следует, что $f(z)$ можно продолжить с множества E на всю плоскость так, что полученная в результате продолжения функция $F(z)$ будет целой функцией, удовлетворяющей условию

$$\max_{|z|=r} |F(z)| < M(r).$$

Отметим, что если требовать, чтобы неравенство

$$\rho_n(E; f) < \varphi(n) \qquad (n = n_1, n_2, \ldots) \tag{3}$$

выполнялось не для всех n, а для какой-нибудь бесконечной последовательности чисел $n_1, n_2, \ldots$, то из (3) следует, что $f(z)$, хотя и не аналитична на E, вообще говоря, и может иметь как угодно „плохой“ (в смысле медленности убывания) модуль непрерывности, однако обладает рядом свойств, характерных для аналитических функций: например, $f(z)$ не может ни сколько-нибудь быстро убывать вблизи какой-либо точки, ни обращаться в нуль на бесконечном множестве $M \in E$, не будучи тождественным нулем ($\varphi(n) = \varphi_M(n)$) [3].

Теорема 5. *Каковы бы ни были функции $\varphi(n) > 0$ ($n = 1, 2, \ldots$) и $\omega(\delta) > 0$, $\omega(\delta) \to 0$, $\delta \to 0$, существует совершенное множество точек $P \in [0; 1]$ и непрерывная на P функция $f(x)$ так, что*

$$\rho_n(P; f) < \varphi(n), \qquad n > n_0;$$

однако при любых a, b $(0 \leqslant a < b \leqslant 1)$

$$\omega_{a,b}(\delta) > \omega(\delta), \qquad \delta < \delta(a; b),$$

где $\omega_{a,b}(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$ на части P, заключенной в отрезке $[a; b]$ ($\omega_{a,b}(\delta) = 1$, если $P[a; b] = 0$).

Таким образом, имеет смысл поставить задачу о зависимости ρ_n от тех или иных свойств множества E. Для простоты допустим, что E — линейное совершенное множество, расположенное в $[0; 1]$.

Согласно известному классическому результату, если E является отрезком и к функции $f(x)$ можно приблизиться со скоростью геометрической прогрессии, т. е. $\rho_n < q^n$, $0 < q < 1$, то $f(x)$ аналитична в каждой точке E. Однако для того, чтобы заключить, что $f(x)$ аналитична в какой-либо точке x_0, нет необходимости требовать $\rho_n(E; f) < q^n$ на целом отрезке, заключающем точку x_0.

Теорема 6. *Если точка x_0 является регулярной точкой множества E (в смысле решения задачи Дирихле) и*

$$\rho_n(E;f) < q^n, \qquad 0 < q < 1,$$

то $f(x)$ аналитична в x_0.

Например, если на канторовом совершенном множестве P_0 к $f(x)$ можно приблизиться полиномами со скоростью прогрессии, то $f(x)$ аналитична на P_0.

Если $\gamma_n(x_0)$ означает емкость той части дополнения к P, которая расположена в отрезках $\frac{1}{2^{n+1}} < |x - x_0| < \frac{1}{2^n}$, то, согласно критерию Винера, для регулярности точки (1) достаточно, чтобы

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \gamma_n(x_0) < \infty;$$

в общем случае, когда известно, что к $f(x)$ можно приблизиться с какой-либо скоростью ρ_n, возможно связать скорость сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \gamma_n(x_0)$ и скорость убывания ρ_n со свойствами $f(x)$ (например, с числом существующих в x_0 производных).

С. Н. Бернштейн показал [2], что если для какой-либо бесконечной последовательности целых чисел $\{n_k\}$ выполняется неравенство

$$\rho_n([0;1];f) = E_n(f) < q^n, \quad n = n_1 n_2, \ldots, \quad 0 < q < 1, \tag{4}$$

и $f(x)$ обращается в нуль на каком-либо отрезке $[a, b]$, то $f(x) \equiv 0$. Это же заключение можно сделать при меньших требованиях.

Теорема 7. *Если для каких-либо $n_1 < n_2 < \ldots < n_k < \ldots$ выполняется неравенство* (4) *и $f(x)$ обращается в нуль на множестве положительной емкости, то $f(x) \equiv 0$.*

Сектор математики
Академии Наук Армянской ССР

Поступило
1 VII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. В. Келдыш, Усп. матем. наук, в. 6, 26 (1938). [2] S. Bernstein, C. R., **179** (1924). [3] С. Н. Мергелян, Доклады АН Арм. ССР, **8**, № 2 (1948). [4] С. Н. Мергелян, ДАН, **62**, № 1 (1948).