Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

М. Я. ЛЕОНОВ

ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 VII 1948)

Малые колебания около заданного движения довольно широкого класса механических систем одной степени свободы могут описываться [1] линейным дифференциальным уравнением вида

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 2\gamma(\theta)\frac{dx}{d\theta} + x = 0. \tag{1}$$

Будем считать здесь функцию γ непрерывной. Общее решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(\theta) = e^{-2\int\limits_c^\theta \gamma\cos^2\varphi\,d\theta}\sin\varphi \qquad (c = \mathrm{const}), \tag{2}$$

где φ является общим интегралом „фазового“ уравнения

$$d\varphi/d\theta = 1 + \gamma\sin 2\varphi. \tag{3}$$

Из формулы (2) очевидно, что $x(\infty) = 0$ при $\gamma > 0$, и, наоборот, общий интеграл уравнения (1) неограниченно растет на бесконечности при $\gamma < 0$. В связи со сказанным функцию γ можно называть коэффициентом затухания.

Определим еще „фазовый коэффициент затухания“ формулой

$$\gamma\,d\theta = \mu(\varphi)\,d\varphi. \tag{4}$$

Тогда формула (3) дает

$$\theta(\varphi) = \int [1 - \mu(\varphi)\sin 2]\,\varphi\,d\varphi. \tag{5}$$

Ниже переменная φ будет считаться независимой (параметром), а θ — монотонной функцией параметра φ. Это возможно полагать, во всяком случае, при $|\gamma| < 1$. Из формул (5) и (3) следует

$$\gamma[\theta(\varphi)] = \frac{\mu(\varphi)}{1 - \mu(\varphi)\sin 2\varphi}. \tag{6}$$

Заданием функции $\mu(\varphi)$ определяется функция $\gamma(\theta)$ в параметрической форме и определяется интеграл уравнения (1) в замкнутой форме.

В случае, когда уравнение (1) описывает колебания системы с положительными, непрерывными и периодически изменяющимися со временем упруго-инерционными коэффициентами и положительным коэффициентом трения, можно установить, что функция γ является периодической и в среднем положительной, т. е.

$$\gamma(\theta + L) = \gamma(\theta), \qquad \int\limits_0^L \gamma\,d\theta > 0. \tag{7}$$

Ниже мы ограничимся рассмотрением случаев, когда условия (7) удовлетворяются. При этом могут возникать неустойчивые (по Ляпунову) решения уравнения (1). Такие решения возможны только тогда, когда существуют действительные решения φ_p уравнения (3), удовлетворяющие условиям

$$\varphi_p(\theta + L) = \varphi_p(\theta) + n\pi, \tag{8}$$

где n — целое число, показывающее сколько раз решение уравнения (1) переходит через нуль за период L. Функции φ_p называются нами ([2]) резонансными фазами.

Из сказанного выше следует, что

$$\gamma[\varphi_p + n\pi] = \gamma[\varphi_p], \qquad \{\gamma[\varphi_p] = \gamma[\theta(\varphi_p)]\} \tag{9}$$

и, следовательно,

$$\mu(\varphi_p + n\pi) = \mu(\varphi_p). \tag{10}$$

Таким образом, в условиях, необходимых для возможности неустойчивых решений уравнения (1), функцию μ в формулах (5), (6) можно представить в виде

$$\mu(\varphi) = a_0 + a_{2/n} \cos\frac{2}{n}\varphi + b_{2/n}\sin\frac{2}{n}\varphi + a_{4/n}\cos\frac{4}{n}\varphi + \ldots$$

$$\ldots + b_{k/n}\sin\frac{k}{n}\varphi + \ldots$$

При ограниченном коэффициенте γ должно быть $\mu(\varphi)\sin 2\varphi < 1$. Пользуясь формулами (4), (5) и (8), можно найти

$$a_0 = \frac{1}{n\pi}\int_0^L \gamma\, d\theta, \qquad b_2 = 2\left(1 - \frac{1}{n\pi}\right). \tag{11}$$

Задаваясь периодической функцией $\mu(\varphi)$ в виде тригонометрического полинома, можем определить из формул (5) и (6) класс функций $\gamma(\theta)$, для которых возможны простейшие решения уравнения (1) в замкнутой форме. Неустойчивые решения будут тогда и только тогда, когда

$$|a_2| > 2a_0 \qquad (a_0 > 0). \tag{12}$$

Критический случай (одно решение периодическое, другое — затухающее) будет при $a_2 = \pm 2a_0$.

Следуя существующей терминологии, можно считать, что при $a_2 \neq 0$ имеет место параметрический (димультипликационный) резонанс. Случай выполнения условия (12) можно называть сильным параметрическим резонансом. В более общем виде условие сильного параметрического резонанса представляется следующим образом:

$$\left|\int_0^{n\pi}\mu(\varphi)\cos 2\varphi\, d\varphi\right| > \int_0^{n\pi}\mu(\varphi)\, d\varphi \qquad (\mu(\varphi + n\pi) = \mu(\varphi)).$$

Введение понятия фазового коэффициента затухания позволяет существенно упростить существующие представления о резонансе как при собственных, так и при вынужденных квазигармонических колебаниях. Кроме того, при этом возможно эффективное исследование квазигармонических колебаний полуобратным методом (рациональным выбором функции μ).

Поступило
20 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Леонов, Доповиди АН УССР, № 3 (1948). [2] М. Я. Леонов, Прикладн. матем. и мех., № 3 (1948).