Доклады Академии Наук СССР
1948. Том LXII, № 2

МАТЕМАТИКА

К. И. БАБЕНКО

О СОПРЯЖЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

(Представлено академиком М. В. Келдышем 8 VII 1948)

§ 1. Целью настоящей заметки является установление одного свойства сопряженных функций и применение полученного результата к вопросу о базисах в гильбертовом пространстве.

Как известно, для всякой интегрируемой периодической (с периодом 2π) функции $f(x)$ интеграл

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{f(t)}{2\operatorname{tg}\frac{t-x}{2}}\,dt \tag{1}$$

существует почти всюду. Обозначим интеграл (1) через $\bar{f}(x)$. Функция $\bar{f}(x)$ называется сопряженной к $f(x)$.

Теорема 1. *Если $f(x)$ периодическая (с периодом 2π) и такая, что*

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p|x|^\alpha dx<\infty,$$

где $p>1$, $-1<\alpha<p-1$, то

$$\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|\bar{f}(x)|^p|x|^\alpha dx\right\}^{1/p}\leqslant A\left\{\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^p|x|^\alpha dx\right\}^{1/p}. \tag{2}$$

Постоянная A зависит от p и α.

Случай $\alpha=0$ дает известную теорему, принадлежащую М. Риссу. Известно также, что если $f(x)\in L_p(-\infty,\infty)$, $p>1$, то интеграл

$$g(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(t)}{x-t}\,dt \tag{3}$$

существует почти всюду и

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^p dx\right\}^{1/p}\leqslant B\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p dx\right\}^{1/p}. \tag{4}$$

Имеет место теорема, аналогичная теореме 1.

Теорема 1'. *Если $f(x)$ такова, что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^p|x|^\alpha dx<\infty, \tag{5}$$

где $p>1$, $-1<\alpha<p-1$, *то интеграл* (3) *существует почти всюду и*

$$\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\right\}^{1/p}\leqslant C\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\right\}^{1/p}. \tag{6}$$

Постоянная C *зависит от* p *и* α.

Из теоремы 1 можно получить теорему 1′ и наоборот. Наметим вкратце ход доказательства теоремы 1′.

Пусть $0\leqslant\alpha<p-1$ и $f(x)$ — характеристическая функция интервала (a, b). Не ограничивая общности, можно предположить, что $0<a<b$. Тогда

$$g(x)=-\frac{1}{\pi}\log\left|\frac{b-x}{a-x}\right|,$$

и сравнительно нетрудно показать, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\log\left|\frac{b-x}{a-x}\right|\right|^{p}|x|^{\alpha}dx\leqslant\frac{A_p}{p-\alpha-1}\int_{a}^{b}|x|^{\alpha}dx, \tag{7}$$

где постоянная A_p зависит только от p. Если $f(x)$ — ступенчатая функция, равная нулю вне некоторого интервала, то из (7), применяя неравенство Минковского, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\leqslant\frac{A_p}{p-\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx. \tag{8}$$

Если $f(x)$ — произвольная функция, равная нулю вне интервала $(-N, N)$ и удовлетворяющая условию (5), то можно построить последовательность $\{f_m(x)\}$ ступенчатых функций таких, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)-f_m(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx=0$$

и

$$\int_{-N}^{N}|f_m(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\leqslant\int_{-N}^{N}|f(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx.$$

Заметим, что можно найти такое $r>1$, что

$$\lim_{m\to\infty}\int_{-N}^{N}|f(x)-f_m(x)|^{r}dx=0$$

и

$$\left\{\int_{-N}^{N}|f_m(x)|^{r}dx\right\}^{1/r}\leqslant C_1\left\{\int_{-N}^{N}|f(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\right\}^{1/p}.$$

Неравенство (8) дает

$$\int_{-\infty}^{\infty}|g_m(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx\leqslant\frac{A_p}{p-\alpha-1}\int_{-N}^{N}|f_m(x)|^{p}|x|^{\alpha}dx,$$

где $g_m(x)$ определяется равенством (3) через функцию $f_m(x)$.

Учитывая сделанное замечание и неравенство (4), мы можем найти подпоследовательность $\{g_{m_k}(x)\}$, сходящуюся почти всюду к $g(x)$.

Применение леммы Фату к последнему неравенству завершает доказательство неравенства (6) для класса функций, исчезающих вне некоторого интервала. Без труда общий случай может быть сведен к предыдущему. Нетрудно освободиться и от ограничения $\alpha \geqslant 0$. Постоянные в неравенствах (2) и (6) неограниченно возрастают, когда α стремится либо к $p-1$, либо к -1. Можно построить примеры функций, реализующих сколь угодно большую величину констант при соответствующем выборе α.

При доказательстве теоремы 1' мы пользовались теоремой Рисса. Можно дать доказательство, не опирающееся на эту теорему. В процессе этого доказательства нужно будет воспользоваться следующими леммами.

Лемма 1 (Харди — Литтльвуда) (1). *Если $f(r, x)$ — интеграл Пуассона для интегрируемой функции $f(x)$ и*

$$F(x) = \sup_{0<|t|<\pi} \frac{1}{t} \int_x^{x+t} |f(u)|\, du, \tag{9}$$

то

$$\sup_{0 \leqslant r<1} |f(r, x)| \leqslant AF(x),$$

где A — абсолютная постоянная.

Лемма 2. *Есла $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы* 1, *а $F(x)$ — функция, определенная равенством* (9), *то*

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |F(x)|^p |x|^\alpha\, dx \right\}^{1/p} \leqslant A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p |x|^\alpha\, dx \right\}^{1/p},$$

где A — постоянная, зависящая от p и α $(-1<\alpha<p-1)$.

Пользуясь теоремой 1 и леммами 1 и 2, можно доказать следующую теорему.

Теорема 2. *Если $f(x)$, p и α удовлетворяют условиям теоремы* 1 *и*

$$\bar{f}(x) = \sup_{0<h\leqslant\pi} |\bar{f}_h(x)|,$$

где

$$\bar{f}_h(x) = -\frac{1}{\pi} \int_h^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x-t)}{2 \operatorname{tg} \frac{t}{2}}\, dt, \quad 0<h\leqslant\pi,$$

то

$$\left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |\bar{f}(x)|^p |x|^\alpha\, dx \right\}^{1/p} \leqslant A \left\{ \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^p |x|^\alpha\, dx \right\}^{1/p}.$$

Теорема 2 придает известную законченность теореме 1.

§ 2. Дадим применение теоремы 1 к одному вопросу функционального анализа. Рассмотрим сепарабельное гильбертово пространство H. Последовательность элементов $\{f_n\}$ из H называется базисом, если любой элемент $f \in H$ можно единственным образом представить в виде

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k. \tag{10}$$

Н. К. Бари ввела важный класс базисов таких, что для любого $f \in H$

$$m \left\{ \sum_1^{\infty} |a_k|^2 \right\}^{1/2} \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k \right\| \leqslant M \left\{ \sum_1^{\infty} |a_k|^2 \right\}^{1/2}, \tag{11}$$

где m и M — абсолютные постоянные, зависящие только от базиса.

Н. К. Бари поставила вопрос, существуют ли базисы, для которых не выполняется условие (11). Теорема 1 позволяет построить пример базиса, для которого условие (11) не имеет места.

Возьмем за пространство H пространство $L_2(-\pi, \pi)$. Пусть $0 < \alpha < \frac{1}{2}$. Тогда последовательности функций

$$\{|x|^{-\alpha} e^{inx}\} \quad \text{и} \quad \{|x|^{\alpha} e^{inx}\}$$

суть базисы, для которых не выполняется условие (11).

Действительно, любая функция $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ может быть единственным образом представлена в виде

$$f(x) \sim |x|^{\alpha} \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}.$$

Применяя теорему 1, обычным приемом можно показать, что при $N \to \infty$ имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left| f(x) - |x|^{\alpha} \sum_{-N}^{N} c_n e^{inx} \right|^2 dx \to 0,$$

т. е. $\{|x|^{\alpha} e^{inx}\}$ — базис. Аналогично убеждаемся, что и $\{|x|^{-\alpha} e^{inx}\}$ — базис. Взяв функцию $f(x) \in L_2(-\pi, \pi)$ такую, чтобы $||x|^{-\alpha} f(x)|^2$ не было интегрируемо, получим $\sum_{-\infty}^{\infty} |c_n|^2 = \infty$, т. е. условие (11) не выполняется.

Теорема 1′ находит применение в интегралах Фурье. А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если $F(x)$ — преобразование Фурье функции $f(x)$ такой, что $|f(x)|^p |x|^{p-2} \in L(-\infty, \infty)$ $(p \geqslant 2)$, то для функции*

$$f(x, a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-a}^{a} F(t) e^{-ixt} dt$$

имеет место соотношение

$$\lim_{a \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - f(x, a)|^p |x|^{p-2} dx = 0.$$

Теорема 3 восполняет пробел в известной теореме об интегралах Фурье.

В заключение приносим благодарность Н. К. Бари за замечания, сделанные ею при ознакомлении с содержанием данной заметки.

Поступило
22 VI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, 1938.