Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

Г. ПЕТРАШЕНЬ

О ЗАДАЧЕ ЛЕМБА В СЛУЧАЕ УПРУГОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА

(Представлено академиком В. И. Смирновым 16 XII 1948)

На примере простой задачи излагается новый метод исследования динамических процессов в некоторых упругих телах. Этот метод содержит в себе метод комплексных решений В. И. Смирнова и С. Л. Соболева [1] и, кроме задачи Лемба для полупространства, позволяет установить полную картину динамических процессов в родственной задаче для слоя, а также в задаче для упругой сферы, возмущенной сосредоточенным воздействием. В следующей заметке мы дадим основные результаты решения задачи Лемба для плоского упругого слоя [2].

1. Пусть при $t=0$ на границе $z=0$ полупространства была приложена единичная, сосредоточенная в пространстве и времени сила T_{zz}, не зависящая от переменной y декартовой системы координат. В таком случае поле упругих смещений

$$\mathbf{u} = u(x, z, t)\,\mathbf{i} + w(x, z, t)\,\mathbf{k}$$

оказывается плоским и определяется формулами

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x} - \frac{\partial\psi}{\partial z}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{\partial\psi}{\partial x} \tag{1}$$

через потенциалы φ и ψ.

Задача нахождения возмущений в полупространстве $z \geqslant 0$, $-\infty < x < \infty$, сводится к решению волновых уравнений

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = a^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = b^2\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}, \tag{2}$$

в которых $a = \sqrt{\frac{\rho}{\lambda + 2\mu}}$, $b = \sqrt{\frac{\rho}{\mu}}$, при нулевых начальных данных

$$\varphi = \psi = \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{\partial\psi}{\partial t}\Big|_{t=0} = 0 \tag{3}$$

и следующих граничных условиях:

$$\begin{gathered} \mu\left[2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2}\right]\Big|_{z=0} = 0, \\ \left[\lambda\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}\right) + 2\mu\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\,\partial z}\right)\right]\Big|_{z=0} = T_{zz} = \delta(x)\,\delta(t), \end{gathered} \tag{4}$$

где символы Дирака δ применены для обозначения сосредоточенной силы.

2. Обозначим $\gamma=\frac{a}{b}=\sqrt{\frac{\mu}{\lambda+2\mu}}$, введем в рассмотрение комплексную плоскость (ζ) с разрезами от точек $\pm i$ и $\pm i/\gamma$, параллельными отрицательной части вещественной оси, и определим ветви нижеследующих радикалов условиями, что $\arg\sqrt{1+\zeta^2}=\arg\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}=0$ при $\zeta>0$.

Нетрудно убедиться, что решение задачи (2), (3), (4) может быть получено в виде интегралов Фурье

$$\varphi(x, z, t)=\frac{1}{b\mu\pi}\int\limits_0^\infty X(z, k, t)\frac{\cos kx}{k}dk,$$
$$\psi(x, z, t)=\frac{2}{b\mu\pi}\int\limits_0^\infty Y(z, k, t)\frac{\sin kx}{k}dk, \tag{5}$$

функции X и Y в которых имеют следующие значения $(\sigma>0)$:

$$X=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2+\zeta^2)\,e^{-zk\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}\,e^{k\frac{t}{b}\zeta}\,d\zeta,$$
$$Y=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,e^{-zk\sqrt{1+\zeta^2}}}{(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}}\,e^{k\frac{t}{b}\zeta}\,d\zeta. \tag{6}$$

Формулы (1), (5) и (6) дают полное решение нашей задачи для упругого полупространства.

3. Непрерывной деформацией перейдем от пути интегрирования в (6) к такому контуру (λ), что во всех его точках, где $|\operatorname{Im}\zeta|<1-\varepsilon$, будет иметь место неравенство $\operatorname{Re}\zeta<0$. При такой деформации пересекаются: двойной корень $\zeta=0$ и простые корни $\zeta=\pm i\vartheta$ уравнения Релея *

$$R(\zeta)=(2+\zeta^2)^2-4\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}. \tag{7}$$

Поэтому для функций X и Y из (6) мы получаем формулы

$$X=X_0+X_R+X_\lambda,\quad Y=Y_0+Y_R+Y_\lambda, \tag{8}$$

в которых X_0 и Y_0 — вычеты подинтегральных функций (6) в точке $\zeta=0$, X_R и Y_R — суммы вычетов в точках $\zeta=\pm i\vartheta$, а X_λ и Y_λ обозначают интегралы (6), распространенные на контур (λ).

Нетрудно убедиться, что подстановка X_0 и Y_0 в (5) и (1) дает $\mathbf{u}_0\equiv 0$. Подстановка X_R и Y_R в (5) и (1) дает известное поле волны

* Число ϑ обозначает корень «вещественного уравнения» Релея, равный 0,921..., если $\lambda=\mu$.

Релея $\mathbf{u}_R$, часть которого, соответствующая движению в сторону $x > 0$, имеет значение:

$$\mathrm{const}\left\{\left[\frac{z}{z^2(1-\gamma^2\vartheta^2)+\xi^2}-2\frac{1-\vartheta^2}{2-\vartheta^2}\frac{z}{z^2(1-\vartheta^2)+\xi^2}\right]\mathbf{i}-\right.$$
$$\left.-\left[\frac{\xi}{z^2(1-\gamma^2\vartheta^2)+\xi^2}-\frac{2}{2-\vartheta^2}\frac{\xi}{z^2(1-\vartheta^2)+\xi^2}\right]\mathbf{k}\right\}, \qquad (9)$$

где $\xi = x - v_R t = x - \frac{\vartheta}{b}t$. Наконец, подстановка X_λ и Y_λ дает поле $\mathbf{u}_\lambda$, которое в известном смысле можно назвать полем продольных и поперечных волн.

Представление точного решения $\mathbf{u}$ нашей задачи в виде суммы $\mathbf{u}_R + \mathbf{u}_\lambda$ слагаемых, каждое из которых имеет лишь ограниченный физический смысл, оказывается весьма полезным для анализа точного решения.

Слагаемые $\mathbf{u}_R$ и $\mathbf{u}_\lambda$ существенно отличаются друг от друга характером разрывов и поведением на бесконечности. Кроме того, оказывается, что функция $\mathbf{u}_\lambda$ весьма удобна для исследований.

4. Количественное и качественное изучение $\mathbf{u}_\lambda$ при $t \gg 1$ можно производить асимптотическими методами. Предполагая, что в интегралах X_λ и Y_λ $kt \gg 1$, выберем (λ) так, чтобы в некоторых точках контура подинтегральные функции достигали резких максимальных значений и чтобы при удалении от этих точек вдоль контура функции убывали наиболее быстро. Тогда легко можно оценить X_λ и Y_λ, что позволяет, в свою очередь, выделить главные части поля $\mathbf{u}_\lambda$.

Подобными исследованиями удается получить весьма точную количественную оценку $\mathbf{u}_\lambda(x, z, t)$ в некоторой (сравнительно узкой) области вблизи фронтов продольной и поперечной волн, а также удается дать качественную характеристику $\mathbf{u}_\lambda$ во всех остальных точках пространства. О количественном исследовании $\mathbf{u}_\lambda$ в точках позади фронта будет сказано ниже.

5. Нетрудно установить родство между методом комплексных решений и методом неполного разделения переменных, который был положен в основу наших исследований. Обозначим через (l) контур интегрирования в (6). Тогда можно написать:

$$u = \frac{i}{b\mu 2\pi^2}\int_0^\infty dk \int_{(l)} \sin kx \left\{\frac{(2+\zeta^2)\, e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right)}}{R(\zeta)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\, e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}\right)}}{R(\zeta)}\right\} d\zeta,$$
$$(10)$$
$$w = \frac{i}{b\mu 2\pi^2}\int_0^\infty dk \int_{(l)} \cos kx \left\{\frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,(2+\zeta^2)\, e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\right)}}{R(\zeta)} - \right.$$
$$\left. - \frac{2\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\, e^{k\left(\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}\right)}}{R(\zeta)}\right\} d\zeta,$$

где $R(\zeta)$ имеет значение (7).

Основываясь на оценке X_λ и Y_λ, нетрудно доказать, что при подходящем выборе контура (l) в формулах (10) допустимо переставить порядок интегрирования по k и ζ. Переставляя порядок и интегрируя по k, мы получаем:

$$u = \frac{\mathrm{Re}}{b\mu\pi^2}\left\{-\frac{1}{2}\int\limits_{(l_0)}\frac{(2+\zeta^2)\,d\zeta}{R(\zeta)\left[\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}+ix\right]} + \right.$$
$$\left. + \int\limits_{(l_1)}\frac{\sqrt{1+\zeta^2}\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,d\zeta}{R(\zeta)\left[\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}+ix\right]}\right\},$$

$$w = \frac{\mathrm{Re}}{b\mu\pi^2}\left\{-\frac{i}{2}\int\limits_{(l_0)}\frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,(2+\zeta^2)\,d\zeta}{R(\zeta)\left[\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}+ix\right]} + \right. \tag{11}$$
$$\left. + i\int\limits_{(l_1)}\frac{\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}\,d\zeta}{R(\zeta)\left[\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}+ix\right]}\right\},$$

где (l_0) и (l_1) суть такие бесконечные контуры (оставляющие слева от себя разрезы плоскости (ζ), а также точки $\zeta=0$ и $\zeta=\pm i\vartheta$), что справа от них имеется лишь по одному корню уравнений:

$$\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\gamma^2\zeta^2}+ix=0 \quad (\text{для } l_0),$$
$$\frac{t}{b}\zeta - z\sqrt{1+\zeta^2}+ix=0 \quad (\text{для } l_1). \tag{12}$$

Вычисление интегралов (11) по вычетам в упомянутых корнях уравнений (12) приводит, после подстановки $\theta = e^{-i\frac{\pi}{2}}\frac{b}{\zeta}$, наше решение к замкнутым алгебраическим выражениям, известным из метода комплексных решений ([1]). Несмотря на замкнутость формы, такое представление неудобно для получения физических следствий.

Нетрудно было бы убедиться, что для исследования волны Релея удобнее всего исходить из (11) (чтобы выделить волну Релея из (11) достаточно лишь перейти к контуру (λ), упоминавшемуся выше).

Исследование фронтов продольной и поперечной волн удобно производить на основе функции $\mathfrak{u}_\lambda$, получающейся из (10) заменой (l) на (λ).

Наконец, для исследования поля $\mathfrak{u}_\lambda$ позади фронтов волн весьма удобны формулы (11), в которых (l_0) и (l_1) заменены контуром (λ). Эти формулы позволяют представить возмущения u_λ и w_λ простыми рядами вида $\frac{1}{t}\sum c_{nm}\left(\frac{x}{t}\right)^n\left(\frac{z}{t}\right)^m$, сходящимися весьма быстро в точках, удаленных от фронта. Получение таких же рядов по методу комплексных решений требовало бы значительно большего труда.

Ленинградский государственный университет
им. А. А. Жданова

Поступило
19 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов и С. Л. Соболев, Тр. Сейсмологическ. ин-та, № 20 (1932). [2] Г. Петрашень, ДАН, 64, № 6 (1949).