Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МЕХАНИКА

М. Я. ЛЕОНОВ

УСТОЙЧИВОСТЬ КВАЗИГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 14 XII 1948)

Пусть колебания некоторой механической системы описываются уравнением

$$\frac{d^2x}{d\theta^2} + 2\gamma(\theta)\frac{dx}{d\theta} + x = 0. \quad (1)$$

Функция γ определяется известным образом [1] через упруго-инерционные коэффициенты и коэффициент трения, которые будем считать периодическими с общим периодом. В этом случае функция γ будет также периодической.

Определим постоянные L и k следующим образом:

$$\gamma(\theta + L) = \gamma(\theta), \quad k = \int_0^L \gamma d\theta, \quad L > 0, \quad (2)$$

и обозначим через x_1 и x_2 решения уравнения (1), удовлетворяющие начальным условиям

$$x_1(0) = 0, \quad x_1'(0) = 1, \quad x_2(0) = 1, \quad x_2'(0) = 0. \quad (3)$$

При этом всякое решение уравнения (1) можно представить в виде

$$x(\theta + L) = x'(L)\,x_1(\theta) + x(L)\,x_2(\theta). \quad (4)$$

Определяя, по Флоке, такие решения, которые обладают свойством $x(\theta + L) = \sigma x(\theta)$, найдем, что σ определяется характеристическим уравнением

$$\begin{vmatrix} x_1'(L) - \sigma & x_1(L) \\ x_2'(L) & x_2(L) - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Используя формулу

$$x_1'(L)\,x_2(L) - x_2'(L)\,x_1(L) = e^{-2k}, \quad (6)$$

легко установить, что по крайней мере один из корней уравнения (5) по модулю больше единицы, если $k < 0$, т. е.

$$\int_0^L \gamma d\theta < 0. \quad (7)$$

При $k \geqslant 0$ один из корней уравнения (5) будет по модулю больше единицы тогда и только тогда, когда

$$| x_1'(L) + x_2(L) | > 1 + e^{-2k}. \tag{8}$$

Условия (7) и (8) будем для краткости называть условиями неустойчивости (неограниченного роста общего интеграла при $\theta \to +\infty$).

При $k > 0$ корни уравнения (5) не могут быть кратными, когда $|\sigma| = 1$, следовательно, условие (8) является необходимым и достаточным условием неустойчивости при $k > 0$.

Условие (8) при использовании формул работы [1] представится в виде

$$| [\Phi^{1/2}(L) + \Phi^{-1/2}(L)] \cos \varphi_1(L) + N \sin \varphi_1(L) | > H(k), \tag{9}$$

где функции φ_1, Φ и коэффициенты N и H определяются формулами

$$\begin{gathered} \frac{d\varphi_1}{d\theta} = 1 + \gamma \sin 2\varphi_1, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \Phi(\theta) = \exp - 2\int_0^\theta \gamma \cos 2\varphi_1 d\theta, \\ H(k) = e^k + e^{-k}, \quad N = 2\Phi(L)\int_0^L \gamma \Phi^{-1} \sin 2\varphi_1 \, d\theta. \end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично сделанному в работе [2], можно показать, что при условии (8) существуют функции, удовлетворяющие формулам

$$\frac{d\varphi_p}{d\theta} = 1 + \gamma \sin 2\varphi_p, \quad \varphi_p(L) = \varphi_p(0) + n\pi, \tag{11}$$

где n — целое число. При этом условие (9) легко преобразуется к виду

$$\int_0^L \gamma d\theta < \left| \int_0^L \gamma \cos 2\varphi_p \, d\theta \right|. \tag{12}$$

Это условие тождественно с определением сильного параметрического резонанса, данным в работе [3].

Условие (12) по форме аналогично также условию (4.3) работы [2], но между этими условиями имеется различие по существу.

Рассмотрим еще случай $k = 0$ (трение отсутствует). При этом условия неустойчивости (8), (9) и (12) являются только достаточными, так как уравнение (5) допускает кратный корень с модулем, равным единице, когда левая часть неравенства (8) принимает значение ± 2.

Из результатов работы [1] легко заметить, что устойчивость будет иметь место при одновременном выполнении всех нижеследующих условий

$$\Phi(L) = 1, \quad N = 0, \quad \varphi_1(L) = n\pi \ (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{13}$$

Если при $k = 0$ хотя бы одно из условий (13) не выполняется и в то же время

$$[\Phi^{1/2}(L) + \Phi^{-1/2}(L)] \cos \varphi_1(L) + N \sin \varphi_1(L) = \pm 2, \tag{14}$$

то имеет место неустойчивость.

Следовательно, три величины $\Phi(L)$, $\varphi_1(L)$ и N определяют условия устойчивости во всех случаях, исключая простейший случай выполнения условия (7).

Ниже рассмотрим важный случай изменения функции γ, когда

$$\gamma(-\theta) = -\gamma(\theta). \tag{15}$$

При этом будем иметь

$$k = \int\limits_{-L/2}^{L/2} \gamma\, d\theta = 0. \tag{16}$$

Для случая (15) устойчивость будет иметь место при

$$\sqrt{\Phi(L)} \cos \varphi_1(L) < 1 \tag{17}$$

и неустойчивость при

$$\sqrt{\Phi(L)} \cos \varphi_1(L) > 1. \tag{18}$$

Доказательство справедливости этих условий опирается на нижеследующее.

1. Если x_1 и x_2 являются функциями, удовлетворяющими условиям (3) и уравнению (1), причем функция γ обладает свойством (15), то справедливо равенство

$$x_1(-\theta) = -x_1(\theta), \quad x_1'(-\theta) = x_1'(\theta), \quad x_2(-\theta) = x_2(\theta). \tag{19}$$

2. Функции $x_1(\theta + L)$ и $x_2(\theta + L)$ в силу периодичности γ являются тоже решениями уравнения (1). Следовательно,

$$x_2(\theta) \equiv x_1'(L)\, x_2(\theta + L) - x_2'(L)\, x_1(\theta + L), \tag{20}$$

так как правая часть этого тождества при $\theta = 0$ обращается в единицу в силу формул (6) и (16), а ее производная обращается в нуль. Из тождества (20) следует

$$x_2(-L) = x_1'(L). \tag{21}$$

Идея вывода формул (20), (21) указана А. М. Ляпуновым ([4]).

Используя формулы (21) и (19), представим условие неустойчивости (8) в виде

$$|\, x_1'(L)\, | > 1, \tag{22}$$

которое при использовании формулы (29) работы ([1]) сводится к условию (18). Аналогично доказывается справедливость условия устойчивости (17).

Формулы (17) — (22) облегчают исследование решений уравнений вида

$$G\ddot{x} + \dot{G}\dot{x} + Dx = 0, \tag{23}$$

когда упруго-инерционные коэффициенты G и D являются симметричными периодическими функциями, т. е.

$$G(-t) = G(t) = G(t + l), \quad D(-t) = D(t) = D(t + l). \tag{24}$$

Эти условия обычно удовлетворяются в большинстве практических задач по квазигармоническим колебаниям. Подстановка

$$\theta = \int\limits_0^t \sqrt{D/G}\, dt \qquad (25)$$

приводит уравнение (23) к виду (1), причем удовлетворяется условие (15) и условие периодичности (2), где

$$\gamma = \frac{1}{4} \frac{d}{d\theta} \log GD, \qquad L = \int\limits_0^l \sqrt{D/G}\, dt.$$

В заключение приводим приближенную формулу для функции φ_1:

$$\varphi_1 \cong \theta + \frac{1}{1{,}4} \operatorname{arc\,tg} \left[1{,}4\, \psi(\theta) \int\limits_0^\theta \gamma \psi^{-1} \sin 2\theta\, d\theta \right], \qquad (26)$$

где

$$\psi = \exp 2 \int \gamma \cos 2\theta\, d\theta.$$

Формула (26) дает весьма точный для технических расчетов результат, когда

$$\frac{(GD)_{\max}}{(GD)_{\min}} \leqslant 10,$$

что показано в работе ([5]).

Поступило
5 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] М. Я. Леонов, Доповіди АН УССР, № 3 (1948). [2] М. Я. Леонов. Прикладн. матем. и мех., № 6 (1948). [3] М. Я. Леонов, ДАН, 62, № 2 (1948). [4] А. М. Ляпунов, Зап. Академии наук, Физ.-мат. отд., 13, № 2 (1902). [5] М. Я. Леонов, Прикладн. матем. и мех., № 5—6 (1946).