Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Н. Н. ЯНЕНКО

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТРУКТУРА ПОВЕРХНОСТЕЙ МАЛОГО ТИПА

(Представлено академиком И. Г. Петровским 15 XII 1948)

В 1939 г. Аллендорфер [1], исследуя общие вопросы вложения римановых метрик в многомерные евклидовы пространства, ввел в рассмотрение некоторый арифметический инвариант поверхности, называемый типом (t). Этот инвариант играет большую роль при исследовании вопросов вложения поверхностей в E_n, в частности. в вопросе об изгибании поверхностей.

Именно, им доказана следующая теорема, являющаяся обобщением теоремы Beez'a: поверхность $V_m \subset E_{m+q}$, для которой $t(V_m) > 2$. однозначно определена в E_{m+q}, т. е. всякая поверхность $\overline{V}_m$, изометричная V_m, ей конгруентна. Отсюда, для того чтобы V_m допускала нетривиальное изгибание, необходимо $t(V_m) \leqslant 2$.

Определение типа, данное Аллендорфером, является чисто аналитическим, и геометрическая структура поверхностей малого типа $(t = 0, 1, 2)$ остается неясной.

Целью настоящей работы является установление геометрической характеристики поверхностей малого типа $(t = 0, 1, 2)$.

Предварительно дадим определение типа поверхности. Будем считать, что поверхность V_m трижды дифференцируема.

Если задать в каждой точке поверхности дважды дифференцируемый ортогональный единичный репер $J_1, \ldots, J_m; J_{m+1}, \ldots, J_{m+q}$, где векторы $J_1, \ldots, J_m$ касательные, $J_{m+1} = \xi_1, J_{m+q} = \xi_q$ нормальные, то, как известно, имеют место деривационные формулы:

$$dr = \omega^i J_i, \quad i = 1, \ldots, m; \quad \omega^{m+1} = \ldots = \omega^{m+q} = 0;$$
$$dJ_\alpha = \omega_\alpha^\beta J_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q; \quad \omega_\beta^\alpha + \omega_\alpha^\beta = 0, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q.$$

Формы ω^α, ω_β^α удовлетворяют условиям интегрируемости

$$(\omega^\alpha)' = \left[\omega^\beta \omega_\beta^\alpha\right] = \left[\omega^i \omega_i^\alpha\right], \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m+q, \quad i = 1, \ldots, m;$$
$$(\omega_\beta^\alpha)' = \left[\omega_\beta^\gamma \omega_\gamma^\alpha\right], \quad \alpha, \beta, \gamma = 1, \ldots, m+q.$$

Будем выделять, в частности, формы $\omega_\alpha^{m+s} = \psi_\alpha^s$, $s = 1, \ldots, q$, $\alpha = 1, \ldots, m$, которые будем называть в дальнейшем с м е ш а н н ы м и.

Формы ψ_α^s при преобразовании векторов J_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ и ξ_s $(s = 1, \ldots, q)$:

$$\overline{J}_\alpha = A_\alpha^\beta J_\beta, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m,$$

3*

соответственно

$$\overline{\xi}_s = b_s^t \xi_t, \quad s,\ t = 1, \ldots, q,$$

где $\|A_\alpha^\beta\|$, $\|b_t^s\|$ — единичные ортогональные матрицы, преобразуются по закону:

$$\overline{\psi}_\alpha^s = A_\alpha^\beta \psi_\beta^s, \quad \alpha, \beta = 1, \ldots, m, \quad s = 1, \ldots, q$$

или, соответственно,

$$\overline{\psi}_\alpha^s = b_t^s \psi_\alpha^t, \quad s, t = 1, \ldots, q, \quad \alpha = 1, \ldots, m.$$

Мы рассмотрим два важнейших арифметических инварианта системы форм $\{\psi_\alpha^s\}$, а именно ранг r и тип t.

Ранг r системы $\{\psi\} = \{\psi_\alpha^s\}$ есть число линейно независимых форм $\psi_{\alpha_1}^1, \ldots, \psi_{\alpha_q}^q$ $(\alpha_i = 1, \ldots, m)$. Ясно, что ранг r есть инвариант системы $\{\psi\}$, т. е. не зависит от выбора репера $J_1, \ldots, J_m$; $\xi_1, \ldots, \xi_q$ и имеет вполне определенный геометрический смысл. А именно, ранг r равен числу параметров, от которых зависит q-вектор нормали $E_q = \{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$, или, что то же, касательная плоскость $E_m = \{J_1, \ldots, J_m\}$.

Мы будем называть ранг форм $\{\psi\}$ рангом поверхности.

Поверхности ранга r, как легко видно, состоят из плоскостей E_{m-r}, вдоль которых касательная плоскость E_m постоянна: $V_m = \infty^r E_{m-r}$, где вдоль E_{m-r} $E_q = \{\xi_1, \ldots, \xi_q\}$ остается постоянной.

Поверхности малого ранга $r \ll m$ могут рассматриваться как аналоги развертывающихся поверхностей в E_3.

Тип t системы $\{\psi\}$ определяется следующим образом.

Составим выражения:

$$[\Psi_a] = \Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} = [\psi^1_{(\alpha_1} \psi^2_{\alpha_2} \ldots \psi^q_{\alpha_q)}], \quad \alpha_s = 1, \ldots, m;$$

$$[\Psi_a \Psi_b] = [\Psi_{\alpha_1 \ldots \alpha_q} \Psi_{\beta_1 \ldots \beta_q}] = [\psi^1_{(\alpha_1} \ldots \psi^q_{\alpha_q)} \psi^1_{(\beta_1} \ldots \psi^q_{\beta_q)}], \quad \alpha_s, \beta_s = 1, \ldots, m.$$

Вообще,

$$\left[\Psi_{a_1} \ldots \Psi_{a_{\tau+1}}\right] = \left[\Psi_{\alpha_1^1 \ldots \alpha_q^1} \ldots \Psi_{\alpha_1^{\tau+1} \ldots \alpha_q^{\tau+1}}\right],$$

где $a_i = (\alpha_1^i \ldots \alpha_q^i)$, $i = 1, \ldots, \tau + 1$, суть произвольно фиксированные комбинации индексов $\alpha_s = 1, \ldots, m$.

Если $[\Psi_a] \equiv 0$ для любой комбинации a, то тип системы $t(\psi) = 0$.

Если $[\Psi_a] \neq 0$, но $[\Psi_a \Psi_b] \equiv 0$ для всех a, b, то тип $t(\psi) = 1$, и т. д.

Вообще, если $[\Psi_{a_1} \ldots \Psi_{a_\tau}] \neq 0$, но $[\Psi_{a_1} \ldots \Psi_{a_{\tau+1}}] \equiv 0$ для всех $a_1, \ldots, a_{\tau+1}$, то тип $t(\psi) = \tau$.

Данное нами определение типа по существу совпадает с аллендорферовским определением, но отличается от него по форме.

Типом поверхности V_m в данной (произвольной) точке называется тип системы форм $\{\psi\} = \{\psi_\alpha^s\}$.

Очевидно, тип инвариантен относительно выбора реперов $J_1, \ldots, J_m$; $\xi_1, \ldots, \xi_q$.

Для случая гиперповерхности тип t совпадает с рангом r, и в этом случае теорема Аллендорфера вырождается в теорему Beez'а об однозначной определенности гиперповерхностей ранга > 2.

Для дальнейшего введем еще одно понятие.

Будем называть систему форм $\{\psi\}=\{\psi^s_\alpha\}$ типа t **непростой**, если можно образовать такие линейные комбинации $\varphi'_\alpha=\lambda^1_s\psi^s_\alpha, \ldots, \varphi^\rho_\alpha=\lambda^\rho_s\psi^s_\alpha$, $s=1, \ldots, q$, $\alpha=1, \ldots, m$, $1\leqslant\rho<q$,

$$\operatorname{rang}\begin{Vmatrix} \lambda^1_1 & \ldots & \lambda^1_q \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda^\rho_1 & \ldots & \lambda^\rho_q \end{Vmatrix}=\rho,$$

что система форм $\{\varphi\}=\{\varphi'_\alpha \ldots \varphi^\rho_\alpha\}$ имеет тот же тип t. В противном случае систему $\{\psi^s_\alpha\}$ будем называть **простой**.

Тогда имеет место следующая

Теорема алгебраической структуры. *Если система форм $\{\psi^s_\alpha\}$ типа t простая, то ранг системы $r\leqslant N^t_q$, где число N^t_q зависит только от t и q, но не зависит от m.*

Для $q=2$ удалось найти точные оценки, а именно $N^0_2=1$, $N^2_1=3$, $N^2_2=5$, вообще, $N^t_2=2t+1$.

Для общего случая $q>2$ удалось установить только оценки сверху, например:

$$N^0_q\leqslant\frac{q(q-1)}{2}, \qquad N^1_q<2q^2+q^2(q-1)=q^3+q^2,$$

$$N^2_q<\frac{3}{2}q(q^2+q+2).$$

В частности, из нашей теоремы следует, что, грубо говоря, простые системы „малого“ типа имеют „малый“ ранг.

Непосредственным применением предыдущей теоремы получается

Теорема геометрической структуры. *Если $V_m\subset E_{m+q}$, $t(V_m)=t(\psi^s_\alpha)=t$, то*

$$V_m\subset V_{m+s}, \quad \operatorname{rang} V_{m+s}\leqslant(N^t{}_\rho+1)\,2^{q-s-\rho}-1, \tag{$*$}$$

где s может меняться от 0 до $q-1$, ρ есть размерность максимальной простой подсистемы $(\varphi)\subset(\psi)=(\psi^1_\alpha \ldots \psi^q_\alpha)$, обладающей тем же типом, что и (ψ).

Или же, формулируя описательно:

Поверхности малого типа принадлежат поверхностям малого ранга или же суть сами поверхности малого ранга.

Для случая $q=2$ удалось получить точные оценки и тем самым притти к эквивалентному геометрическому определению типа.

Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема. *Поверхность $V_m\subset E_{m+2}$ типа t $(t=0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяет альтернативе:*

1) *V_m есть ранга $r=2t$ или $2t+1$;*

2) *V_m принадлежит гиперповерхности V_{m+1} ранга $r=t$.*

Обратно, если поверхность V_m удовлетворяет альтернативе 1) и 2), она есть поверхность типа t.

Таким образом, в случае $q=2$ альтернатива 1) — 2) есть полный геометрический эквивалент данного нами аналитического определения типа.

Легко видно, что в случае $q=2$ тип поверхности является ее проективным инвариантом, т. е. проективное преобразование евклидова пространства E_n переводит V_m в $\overline{V}_m$ того же типа.

Из теорем геометрической структуры и из теоремы Аллендорфера имеем, в частности:

Для того чтобы поверхность V_m допускала нетривиальное изгибание, необходимо, чтобы удовлетворялись условия (*) (*в случае* $q=2$ *альтернатива* 1)—2)).

Полученные нами теоремы структуры дают возможность сформулировать следующие необходимые условия того, чтобы данное риманово пространство V_m класса q допускало неоднозначно определенное вложение в E_{m+q}.

Теорема. *Для того чтобы вложение* $V_m \subset E_{m+q}$ *было неоднозначно определенное, необходимо, чтобы* V_m *допускала расслоение на* R*-параметрическое семейство метрик* V_{m-R}, *каждая из которых класса* $s \leqslant q-1$: $V_m = \infty^R V_{m-R}$, *класс* $V_{m-R} = s \leqslant q-1$, *причем* R — *число, зависящее только от* s *и* q.

Для случая $q=2$ можно сформулировать более точную теорему.

Теорема. *Для того чтобы метрика* V_m *класса* 2 *допускала неоднозначно определенное вложение в* E_{m+2}, *необходимо выполнение одного из условий:*

1. V_m *допускает расслоение на* 5-*параметрическое семейство евклидовых метрик:* $V_m = \infty^5 E_{m-5}$.

2. V_m *допускает расслоение на двупараметрическое семейство метрик класса* 1: $V_m = \infty^2 V_{m-1}$, *где класс* $V_{m-1} = 1$.

Поступило
2 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] C. B. Allendörfer, Am. J. Math. Soc., **61**, 633 (1939).