Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. ЭПЕЛЬБАУМ

ПОСТРОЕНИЕ БАЗИСА ПОЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ЧИСЕЛ ТИПА Г. Ф. ВОРОНОГО

(Представлено академиком И. М. Виноградовым 17 XII 1948)

1. Основной результат магистерской диссертации Г. Ф. Вороного „О целых алгебраических числах, зависящих от корня неприводимого уравнения 3-й степени" допускает обобщение. Следуя указанию Д. А. Граве, Д. Гребенюк ([1]) дал без доказательства форму базиса поля алгебраических чисел n-й степени, которая содержит как частный случай базис типа Вороного ([2]) для кубической области. Б. Н. Делоне ([3]), анализируя метод Г. Ф. Вороного, установил понятие нормального базиса для кубического поля и дал простое доказательство существования его. Автор в настоящей работе обобщает понятие нормального базиса кубического поля на поля любой степени и дает теорему существования таких базисов, из которой несложными рассуждениями получаем способ вычисления его.

Как известно ([4]), система целых алгебраических чисел $\omega_1 = 1$, $\omega_2, \ldots, \omega_n$ поля $K(\rho)$ образует минимальный базис, если все коэффициенты произведения

$$D\omega_i = a_{i,1} + a_{i,2}\rho + a_{i,3}\rho^2 + \cdots + a_{i,i}\rho^{i-1} \tag{1}$$

целые рациональные числа, а $a_{i,i}$ есть наименьший коэффициент из всех чисел данного вида (1), где D есть дискриминант уравнения

$$f(x) = x^n + a_2x^{n-2} + a_3x^{n-3} + \cdots + a_{n-1}x + a_n = 0, \tag{2}$$

которому удовлетворяет ρ. Нетрудно показать, что коэффициент числа ω_i при ρ в степени $i-1$ есть делитель D. Целые числа $\rho, \rho\omega_2, \ldots$ $\ldots, \rho\omega_n$ выражаются через элементы базиса поля, следовательно, коэффициенты при степенях ρ, меньших $i-1$, делятся на коэффициенты при степени ρ, равной $i-1$. Таким образом, элементы базиса можно записать

$$\omega_i = \frac{b_{i,1} + b_{i,2}\rho + \cdots + b_{i,i-1}\rho^{i-2} + \rho^{i-1}}{D_i}, \tag{3}$$

где $b_{i,1}, b_{i,2}, \ldots, b_{i,i-1}$ — целые рациональные числа, которые могут принимать, независимо друг от друга, бесконечное множество значений (например, $\omega_i + c_1\rho^{i-2} + c_2\rho^{i-3} + \cdots + c_{i-1}$ соответствует другому базисному элементу ω_i), а числа D_i являются делителями D_{i+1}.

Каждый раз, когда $b_{i,j}$ принимают какие-либо из этих значений, где $1 \leqslant i \leqslant n$ и $1 \leqslant j \leqslant i-1$, мы получим, как теперь принято называть, один из единичных ступенчатых базисов поля.

2. Б. Н. Делоне называет единичный ступенчатый базис кубического поля нормальным, если $\omega_2\omega_3$ есть целое рациональное число.

Основой настоящей заметки является мысль обобщить это определение следующим образом: единичный ступенчатый базис поля будем называть **нормальным**, если для $i = 3, 4, \ldots, n-1$ имеют место равенства:

$$\omega_2\omega_i + f_i = \frac{D_{i+1}}{D_i}\,\omega_{i+1}, \tag{4}$$

где f_i — некоторые целые рациональные числа и, кроме того, $\omega_2\omega_n$ — некое целое рациональное число.

Докажем теорему существования нормального базиса. Преобразуем поле $K(\rho)$ в $K(\omega_2)$ и распространим идею доказательства существования нормального базиса кубического поля Б. Н. Делоне на поля n-й степени, т. е. прибавим к элементам базиса $\omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$ по целому рациональному числу так, чтобы в выражениях произведений через базис поля

$$\omega_2\omega_n = c_{n,1} + c_{n,2}\omega_2 + c_{n,3}\omega_3 + \cdots + c_{n,n-1}\omega_{n-1} + c_{n,n}\omega_n, \tag{5}$$

$$\omega_2\omega_i = c_{i,1} + c_{i,2}\omega_2 + c_{i,3}\omega_3 + \cdots + c_{i,i}\omega_i + \frac{D_{i+1}}{D_i}\,\omega_{i+1} \tag{6}$$

$c_{n,2}$, $c_{i,2}$ и $c_{n,n}$ были равны нулю. Для этого достаточно взять за 2-й базисный элемент $\omega_2 - c_{n,n}$ i-й — базисный элемент $\omega_i - c_{i,2}$, n-й базисный элемент $\omega_n - c_{n,2}$; тогда тождества (5) и (6) принимают вид ($i = 3, 4, \ldots, n-1$):

$$\omega_2\omega_n = c_{n,1} + c_{n,3}\omega_3 + \cdots + c_{n,n-1}\omega_{n-1}, \tag{7}$$

$$\omega_2\omega_i = c_{i,1} + c_{i,3}\omega_3 + \cdots + c_{i,i}\omega_i + \frac{D_{i+1}}{D_i}\,\omega_{i+1}. \tag{8}$$

Оказывается, что базис, выбранный таким образом, будет нормальным, т. е. $c_{n,3}, c_{n,4}, \ldots, c_{n,n-1}$ и $c_{i,3}, c_{i,4}, \ldots, c_{i,i}$ будут равны нулю.

Действительно, заменим в тождествах (7) и (8) $\omega_3, \omega_4, \ldots, \omega_n$ их выражениями через степени ω_2 по формуле

$$\omega_i = \frac{b_{i,1} + b_{i,2}\omega_2 + b_{i,3}\omega_2^2 + \cdots + b_{i,i-1}\omega_2^{i-2} + \omega_2^{i-1}}{D_i}. \tag{9}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, получим из тождества (7) систему уравнений:

$$\begin{aligned}
c_{n,1} + c_{n,3}\frac{b_{3,1}}{D_3} + \cdots + c_{n,n-2}\frac{b_{n-2,1}}{D_{n-2}} + c_{n,n-1}\frac{b_{n-1,1}}{D_{n-1}} &= -\frac{f_n}{D_n},\\
c_{n,3}\frac{b_{3,2}}{D_3} + \cdots + c_{n,n-2}\frac{b_{n-2,2}}{D_{n-2}} + c_{n,n-1}\frac{b_{n-1,2}}{D_{n-1}} &= \frac{b_{n,1} - f_{n-1}}{D_n},\\
c_{n,3}\frac{1}{D_3} + \cdots + c_{n,n-2}\frac{b_{n-2,3}}{D_{n-2}} + c_{n,n-1}\frac{b_{n-1,3}}{D_{n-1}} &= \frac{b_{n,2} - f_{n-2}}{D_n},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots &\qquad (10)\\
c_{n,n-2}\frac{1}{D_{n-2}} + c_{n,n-1}\frac{b_{n-1,n-2}}{D_{n-1}} &= \frac{b_{n,n-3} - f_3}{D_n},\\
c_{n,n-1}\frac{1}{D_{n-1}} &= \frac{b_{n,n-2} - f_2}{D_n},
\end{aligned}$$

а из тождества (8) систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&c_{i,1}+c_{i,3}\frac{b_{3,1}}{D_3}+\cdots+c_{i,\,i-1}\frac{b_{i-1,1}}{D_{i-1}}+c_{i,i}\frac{b_{i,1}}{D_i}+\frac{b_{i+1,1}}{D_i}=0,\\
&c_{i,3}\frac{b_{3,2}}{D_3}+\cdots+c_{i,\,i-1}\frac{b_{i-1,2}}{D_{i-1}}+c_{i,i}\frac{b_{i,2}}{D_i}+\frac{b_{i+1,2}}{D_i}=\frac{b_{i,1}}{D_i},\\
&c_{i,3}\frac{1}{D_3}+\cdots+c_{i,\,i-1}\frac{b_{i-1,3}}{D_{i-1}}+c_{i,i}\frac{b_{i,3}}{D_i}+\frac{b_{i+1,3}}{D_i}=\frac{b_{i,2}}{D_i},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&c_{i,\,i-1}\frac{t}{D_{i-1}}+c_{i,i}\frac{b_{i,\,i-1}}{D_i}+\frac{b_{i+1,\,i-1}}{D_i}=\frac{b_{i,i-2}}{D_i},\\
&c_{i,i}\frac{1}{D_i}+\frac{b_{i+1,\,i}}{D_i}=\frac{b_{i,\,i-1}}{D_i},
\end{aligned}
\tag{11}
$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — коэффициенты уравнения, которому удовлетворяет ω_2.

Предположим, что хотя бы одно $c_{i,3}, c_{i,4}, \ldots, c_{i,i}$ или $c_{n,3}, c_{n,4}, \ldots \ldots, c_{n,\,n-1}$ отлично от нуля. Тогда, исключив из системы (10) или (11) $c_{i,3}, c_{i,4}, \ldots, c_{i,i}$ или $c_{n,3}, c_{n,4}, \ldots, c_{n,\,n-1}$, получим уравнение, связывающее коэффициенты $b_{i,j}$ (так как число уравнений в системах, по крайней мере, на единицу больше, чем число неизвестных $c_{n,j}$ или $c_{i,j}$), которые могут принимать бесконечное множество значений независимо друг от друга. Выберем за неизвестное какое-нибудь $b_{l,k}$; подберем остальные $b_{i,j}$ так, чтобы коэффициенты уравнения относительно $b_{l,k}$ были отличны от нуля. Полученное уравнение будет 1-й или 2-й степени и не может иметь бесконечное множество решений при коэффициентах, отличных от нуля, следовательно, наше предположение неверно и теорема доказана.

Из системы (10) получим:

$$
\omega_n=\frac{f_{n-1}+f_{n-2}\omega_2+f_{n-3}\omega_2{}^2+\cdots+f_1\omega_2{}^{n-2}+\omega_2{}^{n-1}}{D_n}, \tag{12}
$$

а из системы (11)

$$
\omega_i=\frac{f_{i-1}+f_{i-2}\omega_2+f_{i-3}\omega_2{}^2+\cdots+f_1\omega_2{}^{i-2}+\omega_2{}^{i-1}}{D_i}. \tag{13}
$$

Положив $\omega_2=\frac{\rho-\tau}{D_2}$, мы получим, что f_i равно $(n-i)$-й производной от полинома $f(\tau)$ (2), деленной на $(n-i)!$

Если мы в формулы (12) и (13) подставим $\omega_2=\frac{\rho-\tau}{D_2}$, то получим форму базиса Д. Гребенюка, которая как частный случай содержит базис Г. Ф. Вороного для кубического поля.

3. Уравнение, которому удовлетворяет ω_i, в виде определителя будет:

$$
\begin{vmatrix}
\frac{f_{i-1}}{D_i}-\omega_i & \frac{f_{i-2}}{D_i} & \cdots & \frac{1}{D_i} & 0 & 0 & \cdots & 0\\
0 & \frac{f_{i-1}}{D_i}-\omega_i & \cdots & \frac{f_1}{D_i} & \frac{1}{D_i} & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
-\frac{f_n}{D_i} & -\frac{f_{n-1}}{D_i} & \cdots & \cdots & -\frac{f_i}{D_i}-\omega_i & 0 & \cdots & 0\\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\
0 & \cdots & 0 & \cdots & -\frac{f_n}{D_i} & -\frac{f_{n-1}}{D_i} & \cdots & -\frac{f_i}{D_i}-\omega_i
\end{vmatrix}=0. \tag{14}
$$

По главной диагонали элементы определителя будут $\frac{f_{i-1}}{D_i} - \omega_i$, а начиная с $(n-i+2)$-й строки элементы главной диагонали будут $-\omega_i$.

Коэффициенты уравнения (14) должны быть целыми рациональными числами, откуда получим сравнения, которые являются необходимыми и достаточными условиями для определения τ, $D_2, D_3, \ldots, D_n$.

Необходимыми условиями являются сравнения

$$f_{k-1} f_n^{n-k} \equiv 0 \pmod{D^{n-k+1}}, \tag{15}$$

где $k = 1, 2, \ldots, n$. Эти сравнения получим из уравнения (14) при $i = n$. Кроме того, из того же уравнения коэффициент при ω_i^{i-1} будет $\frac{(n-i+1) f_{i-1}}{D_i}$; этот коэффициент должен быть целым рациональным числом, т. е. существует сравнение

$$(n-i+1) f_{i-1} \equiv 0 \pmod{D_i}. \tag{16}$$

Таким образом, вопрос о построении и вычислении базиса алгебраического поля n-й степени полностью решается методом, аналогичным методу Г. Ф. Вороного, примененному им для кубического поля.

Поступило
25 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Д. Гребенюк, Бюлл. Среднеазиатск. гос. ун-та (1926). [2] Г. Ф. Вороной, О целых алгебраических числах, зависящих от корня неприводимого уравнения 3-й степени, 1894. [3] Б. Н. Делоне и Д. К. Фадеев, Теория иррациональностей 3-й степени, 1940. [4] В. П. Бельмин, Введение в теорию алгебраических чисел, 1913.