Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Е. Г. ШУЛЬГЕЙФЕР

МУЛЬТИПЛИКАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ИДЕАЛОВ В КОММУТАТИВНЫХ КОЛЬЦАХ

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 15 XII 1948)

В настоящей работе решается задача, поставленная А. Г. Курошем, о нахождении необходимых и достаточных условий для того, чтобы каждый присоединенный идеал I^* коммутативного кольца R однозначно разлагался в присоединенное произведение простых присоединенных идеалов, т. е. чтобы в кольце R была хорошая арифметика для присоединенных идеалов. В работе устанавливается также, что класс колец с хорошей арифметикой для присоединенных идеалов более широк, чем класс колец с хорошей арифметикой для обычных идеалов, которые будут называться дальше просто идеалами. Аналогичная задача для идеалов коммутативного кольца решена в работе Мория и Кобаяси ([1],[2]), метод доказательства которых используется в настоящей работе. Свойства присоединенного умножения и определение присоединенного идеала даны в работе ([3]).

§ 1. Определение 1. Идеал I кольца R называется отмеченным идеалом, если фактор-кольцо R/I обладает единицей.

В работе ([3]) было доказано, что совокупность всевозможных разностей между парами элементов из присоединенного идеала I^* есть отмеченный идеал I, причем полный прообраз единицы кольца R/I есть присоединенный идеал I^*. Там же было показано, что единичный класс вычетов по каждому отмеченному идеалу является присоединенным идеалом. Тем самым устанавливается взаимно-однозначное соответствие между отмеченными и присоединенными идеалами; соответствующие друг другу отмеченные идеалы и присоединенные идеалы будут обозначаться одной и той же буквой, но со звездочкой в случае присоединенного идеала. При этом имеет место

Теорема 1. *$I^* \subseteq J^*$ тогда и только тогда, когда $I \subseteq J$.*

Теорема 2. *Множество всех присоединенных идеалов и множество всех отмеченных идеалов кольца R составляют изоморфные структуры.*

Определение 2. Если кольцо R обладает единицей, то элемент a, отличный от единицы, называется присоединенным делителем единицы, если существует такой элемент b, отличный от единицы, что $a \circ b = e$.

Определение 3. Присоединенный делитель единицы a называется унипотентным элементом, если он в некоторой присоединенной степени равен единице.

Теорема 3. *Для того чтобы в кольце R с единицей существовали присоединенные делители единицы, необходимо и достаточно, чтобы в R существовали делители нуля.*

Теорема 4. *В кольце R с единицей каждый присоединенный делитель единицы будет унипотентным элементом тогда и только тогда, когда каждый делитель нуля является нильпотентным элементом.*

Теоремы 3 и 4 следуют из результатов работы ([4]).

Переходим вновь к кольцу R, которое может не содержать единицы.

Аналогично тому, как это делается для идеалов, можно дать определения простого и примарного присоединенного идеала. При этом имеет место

Теорема 5. *Присоединенный идеал P^* будет простым (примарным) присоединенным идеалом тогда и только тогда, когда соответствующий ему отмеченный идеал P является простым (примарным) идеалом.*

Для доказательства рассматривается фактор-кольцо R/P и к нему применяются результаты теоремы 3 (теоремы 4).

Будем говорить, что примарный присоединенный идеал Q^* принадлежит простому присоединенному идеалу P^*, если примарный отмеченный идеал Q принадлежит простому отмеченному идеалу P.

Теорема 6. *Простой присоединенный идеал P^*, к которому принадлежит примарный присоединенный идеал Q^*, состоит из всех элементов кольца R, которые в некоторой присоединенной степени содержатся в Q^*.*

Если кольцо R удовлетворяет условию максимальности для присоединенных идеалов, то в нем каждый присоединенный идеал представим как пересечение конечного числа примарных присоединенных идеалов, причем изолированные компоненты этого представления определяются однозначно. Доказательство этих утверждений аналогично тому, которое для идеалов приведено в ([5]).

§ 2. Определение 4. Пересечение всех отличных от R присоединенных идеалов из R называется **присоединенным нуль-идеалом** и обозначается 0^*. Это пересечение может не содержать ни одного элемента из кольца R. В этом случае будем называть присоединенный нуль-идеал **пустым присоединенным нуль-идеалом**. Пустой присоединенный нуль-идеал имеют, например, полурадикальные кольца.

Определение 5. Присоединенный идеал называется **собственным присоединенным идеалом**, если он отличен от R и 0^*.

Определение 6. Присоединенный идеал называется **нильпотентным присоединенным идеалом**, если он в некоторой конечной присоединенной степени равен 0^*.

Основная теорема. *Для того чтобы каждый собственный присоединенный идеал кольца R однозначно разлагался в присоединенное произведение конечного числа собственных простых присоединенных идеалов, необходимо и достаточно выполнение следующих четырех условий:*

1) *Кольцо R удовлетворяет условию максимальности для присоединенных идеалов.*

2) *В кольце R каждый собственный простой присоединенный идеал является максимальным собственным присоединенным идеалом.*

3) *Все присоединенные степени собственного простого присоединенного идеала различны.*

4) *Между простым присоединенным идеалом P^* и его присоединенным квадратом $P^{*(2)}$ не существует присоединенного идеала.*

Доказательство. Необходимость выполнения условий 1)—4) в кольце R, в котором имеет место однозначное разложение каждого собственного присоединенного идеала на простые множители, вытекает из следующих лемм, справедливых в R.

Лемма 1. *В кольце R выполняется условие* 2).

Доказательство. Допустим, что это не так, т. е. что существует такой собственный простой присоединенный идеал P^* и такой элемент a, не содержащийся в P^*, что присоединенный идеал (a, P^*) собственный. Аналогично тому, как это доказывается в лемме 3 работы ([1]), доказываем, что $(a, P^*)^{(2)} = (a^{(2)}, a \circ P^*, P^{*(2)}) = (a^{(2)}, P^*)$. Отсюда следует, что произвольный элемент p из P^* можно записать так:

$$p = \sum_i \lambda_i (a^{(2)} \circ c_i) + \sum_j \theta_j b_j, \text{ причем } \sum_i \lambda_i + \sum_j \theta_j = 1, \tag{1}$$

где λ_i и θ_j равны ± 1, c_i — элементы из R и b_j — элементы из $(a \circ P^*, P^{*(2)})$. Пусть $\sum\limits_i \lambda_i = m$, откуда $\sum\limits_j \theta_j = 1 - m$. Пользуясь дистрибутивным законом для присоединенного умножения, равенство (1) перепишем в виде:

$$p = a^{(2)} \circ c + (m-1)\, a^{(2)} + \sum_j \theta_j b_j, \text{ где } c = \sum_i \lambda_i c_i. \tag{2}$$

Возьмем в $(a \circ P^*, P^{*(2)})$ два элемента: $d_1 = \sum\limits_{i=1}^{m} a^{(2)} \circ f_i - \sum\limits_{j=1}^{m-1} g_j = a^{(2)} \circ f + (m-1)\, a^{(2)} - \sum\limits_{j=1}^{m-1} g_j$ и $d_2 = a^{(2)} \circ h$, где f_i, g_j и h — элементы из $(a \circ P^*, P^{*(2)})$, $f = \sum\limits_{i=1}^{m} f_i$. Элемент $p' = p - d_1 + d_2 \in P^*$ можно записать так:

$$p' = p - d_1 + d_2 = a^{(2)} \circ c' + \sum_{j=1}^{m-1} g_j + \sum_j \theta_j b_j, \text{ где } c' = c - f + h. \tag{3}$$

Следовательно, $a^{(2)} \circ c' = p' - \sum\limits_{j=1}^{m-1} g_j - \sum\limits_j \theta_j b_j \in P^*$. Но так как $a \notin P^*$, то $c' \in P^*$. Следовательно, элемент p', а поэтому и элемент $p = p' + d_1 - d_2$, содержится в $(a \circ P^*, P^{*(2)})$. Мы доказали, что $P^* \subseteq (a \circ P^*, P^{*(2)})$, т. е.

$$P^* = (a \circ P^*, P^{*(2)}) = P^* \circ (a, P^*).$$

Таким образом, предположение, что присоединенный идеал (a, P^*) — собственный, противоречит условию об однозначности разложения, т. е. лемма доказана.

Лемма 2. *Если R имеет непустой присоединенный нуль-идеал, то в R существует простой нильпотентный присоединенный идеал.*

Лемма 3. *Если присоединенный нуль-идеал 0^* кольца R непростой, то в R существует единственный собственный простой присоединенный идеал P^*, являющийся нильпотентным присоединенным идеалом, и каждый собственный присоединенный идеал является присоединенной степенью этого простого присоединенного идеала.*

Лемма 4. *Пусть I^* — собственный присоединенный идеал и J^* — присоединенный идеал, содержащий I^*. Тогда, если $I^* = P_1^{*(n_1)} \circ \cdots \circ P_k^{*(n_k)}$ есть разложение I^* на простые множители, то $J^* = P_1^{*(l_1)} \circ \cdots \circ P_k^{*(l_k)}$, причем $0 \leqslant l_i \leqslant n_i$; нулевая степень присоединенного идеала полагается, как обычно, равной R.*

Для доказательства этих лемм смотри доказательства аналогичных лемм в работе ([1]).

Из лемм 3 и 4 следуют условия 1) и 4). Условие 3) следует из однозначности разложения.

Доказательство достаточности условий 1)—4) проходит следующим образом. Из условия 1) следует, что каждый собственный присоединенный идеал разлагается в пересечение конечного числа собственных примарных присоединенных идеалов. В силу условия 2) каждая примарная компонента будет изолированной компонентой и, следовательно, разложение собственного присоединенного идеала в пересечение собственных примарных присоединенных идеалов определяется однозначно (см. конец § 1). Из того же условия 2) вытекает, что пересечение конечного числа попарно принадлежащих к различным простым присоединенным идеалам примарных присоединенных идеалов равно их присоединенному произведению. Из условий 1)—4) следует, наконец, что каждый примарный присоединенный идеал равен присоединенной степени простого присоединенного идеала, и достаточность доказана.

§ 3. Известно, что для однозначности разложения идеалов на простые множители необходимо, чтобы в кольце была единица (см. ([1])). Из результатов работы ([4]) следует, что если кольцо R с единицей, то условия 1)—4) основной теоремы будут выполняться тогда и только тогда, когда в кольце R имеет место однозначное разложение собственных идеалов на простые множители.

Однако кольцо может обладать хорошей арифметикой для присоединенных идеалов в том случае, если оно без единицы, и поэтому хорошей арифметикой идеалов не обладает. Так, В. А. Андрунакиевич ([3]) указал тот класс полурадикальных колец, в котором имеет место однозначное разложение собственных присоединенных идеалов на простые множители.

Примером кольца без единицы, которое не является полурадикальным, но удовлетворяет условиям 1)—4) основной теоремы, является двусторонняя прямая сумма $R = R_1 \dotplus R_2$, где R_1 — кольцо с единицей, удовлетворяющее условиям 1)—4), а кольцо R_2 радикальное.

Считаю своим долгом выразить благодарность проф. А. Г. Курошу, под непосредственным руководством которого была выполнена эта работа.

Поступило
14 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] M. Moriya u. Y. Kobayasi, Proc. Imp. Acad. Tokyo, **17**, 129 (1941). [2] M. Moriya u. Y. Kobayasi, ibid., **17**, 134 (1941). [3] В. А. Андрунакиевич, Изв. АН СССР, сер. математ., **12**, 129 (1948). [4] A. L. Foster, Trans. Am. Math. Soc., **59**, 166 (1946). [5] Б. Л. Ван-дер-Варден, Современная алгебра, 2, 1937, §§ 86—89.