Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Б. А. РОЗЕНФЕЛЬД

ГЕОМЕТРИИ ПРОСТЕЙШИХ АЛГЕБР

(Представлено академиком И. Г. Петровским 17 XII 1948)

При рассмотрении поля $\Phi(i)$ комплексных чисел часто пользуются геометрическими интерпретациями этого поля — в виде „плоскости Гаусса" и (при дополнении $\Phi(i)$ „бесконечно удаленной точкой") в виде „сферы Римана". В первом случае в $\Phi(i)$ вводят метрику 2-мерной евклидовой плоскости R_2, в которой расстояние d между комплексными числами ξ и η определяется соотношением

$$d^2 = |\xi - \eta|^2 = (\bar{\xi} - \bar{\eta})(\xi - \eta). \tag{1}$$

Во втором случае в $\Phi(i)$ можно ввести метрику 2-мерной сферы S_2 радиуса r, в которой расстояние d между комплексными числами ξ и η определяется соотношением

$$\cos^2 \frac{d}{2r} = \frac{|1 + \bar{\xi}\eta|}{(1 + \bar{\xi}\xi)(1 + \bar{\eta}\eta)}. \tag{2}$$

Совершенно аналогичные „плоские" и „сферические" метрики можно ввести в некоторые алгебры, являющиеся обобщениями поля $\Phi(i)$.

Рассмотрим класс алгебр над полем Φ вещественных чисел, определяющийся следующими свойствами.

1. В алгебрах существует инволюция (инволютивный антиавтоморфизм), т. е. отображение $\alpha \to \bar{\alpha}$ алгебры на себя, такое, что

$$\overline{\alpha + \beta} = \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\,\bar{\alpha}, \quad \bar{\bar{\alpha}} = \alpha. \tag{3}$$

2. Алгебры обладают единицей 1.

3. Самосопряженные элементы $(\alpha = \bar{\alpha})$ и только эти элементы равны вещественным числам, умноженным на 1.

4. Произведение $\alpha\bar{\alpha}$ является невырожденной квадратической формой.

Теория алгебр такого класса над произвольным полем была построена Олбертом ([1]). Применяя результаты Олберта для случая поля Φ вещественных чисел, мы находим, что этот класс составляют следующие четыре алгебры:

Поле $\Phi(i)$ комплексных чисел с базисом 1, i и законом умножения $i^2 = -1$.

Тело $\Phi(i, j)$ кватернионов с базисом 1, i, j, $k = ij$ и законом умножения $i^2 = -1$, $j^2 = -1$, $ij = -ji$.

Алгебра $\Phi(e)$ двойных чисел с базисом 1, e и законом умножения $e^2 = +1$.

Алгебра $\Phi(i, e)$ псевдокватернионов с базисом 1, i, e, $f = ie$ и законом умножения $i^2 = -1$, $e^2 = +1$, $ie = -ei$.

Алгебра $\Phi(e)$ изоморфна прямому произведению двух полей Φ (базис $e_1 = \frac{1}{2}(1+e)$ и $e_2 = \frac{1}{2}(1-e)$ удовлетворяет условиям $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ и $e_1 e_2 = 0$).

Алгебра $\Phi(i, e)$ изоморфна алгебре Φ_2 вещественных матриц 2-го порядка (базис $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}$ алгебры Φ_2 удовлетворяет закону умножения базиса алгебры $\Phi(i, e)$).

Инволюция $\alpha \to \bar{\alpha}$ в этих алгебрах имеет вид:

$$a + bi \to a - bi, \quad a + bi + cj + dk \to a - bi - cj - dk,$$
$$a + be \to a - be \quad \text{или} \quad a_1 e_1 + a_2 e_2 \to a_2 e_1 + a_1 e_2, \tag{4}$$

$$a + bi + ce + df \to a - bi - ce - df \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_1^2 & a_2^2\end{pmatrix} \to \begin{pmatrix}a_2^2 & -a_2^1\\ -a_1^2 & a_1^1\end{pmatrix}.$$

Квадратичная форма $\alpha\bar{\alpha}$ имеет вид

$$a^2 + b^2, \quad a^2 + b^2 + c^2 + d^2, \quad a^2 - b^2 \quad \text{или} \quad a_1 a_2, \quad a^2 + b^2 - c^2 - d^2$$
$$\text{или} \quad \begin{vmatrix}a_1^1 & a_2^1\\ a_2^2 & a_2^2\end{vmatrix}. \tag{5}$$

Квадратный корень из формы $\bar{\alpha}\alpha$ (положительный, если $\bar{\alpha}\alpha > 0$, и из верхней половины мнимой полуоси, если $\bar{\alpha}\alpha < 0$) называется модулем $|\alpha|$ элемента α.

Если считать за расстояние между элементами ξ и η алгебр $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$ и $\Phi(i, e)$ модуль разности $\xi - \eta$ этих элементов, мы получим плоские метрики этих алгебр. Все эти метрики определяются формулой (1). Из (5) видно, что *тело $\Phi(i, j)$ в этой метрике изометрично 4-мерному евклидову пространству R_4, алгебра $\Phi(e)$ в этой метрике изометрична 2-мерной псевдоевклидовой плоскости индекса 1 ${}^1R_2$, а алгебра $\Phi(i, e)$ в этой метрике изометрична 4-мерному псевдоевклидову пространству индекса 2 ${}^2R_4$.*

Группы движений алгебр $\Phi(i)$, $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$ в их плоских метриках представляются преобразованиями

$$'\xi = \alpha\xi\beta + \gamma, \qquad |\alpha| = |\beta| = 1. \tag{6}$$

Элементами алгебр $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$, не имеющими обратных элементов, являются элементы, удовлетворяющие условию $\alpha\bar{\alpha} = 0$: в $\Phi(i, j)$ — это один элемент 0, в $\Phi(e)$ — это двойные числа типа ke_1 и ke_2, в $\Phi(i, e)$ — это псевдокватернионы, соответствующие вырожденным матрицам. В пространствах R_4, ${}^1R_2$ и ${}^2R_4$, изометричных этим алгебрам, эти элементы представляются, соответственно, одной точкой, парой прямых и 3-мерным конусом 2-го порядка. Если дополнить алгебры $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$ и $\Phi(i, e)$ элементами, обратными и этим элементам, т. е. „бесконечно удаленной точкой“ $\Phi(i, j)$, „бесконечно удаленной парой прямых“ $\Phi(e)$ и „бесконечно удаленным конусом“ $\Phi(i, e)$, в эти алгебры можно ввести сферические метрики, определив расстояние d между элементами этих алгебр по формуле (2).

Тело $\Phi(i, j)$ в этой метрике изометрично 4-мерной сфере S_4 радиуса r в пространстве R_5, алгебра $\Phi(e)$ в этой метрике изометрична 2-мерной сфере ${}^1S_2$ радиуса r в пространстве ${}^1R_3$, алгебра $\Phi(i, e)$ в этой метрике изометрична 4-мерной сфере ${}^2S_4$ в пространстве ${}^2R_5$ *.

Группы движений алгебр $\Phi(i)$, $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$ в их сферических метриках представляются преобразованиями

$$'\xi = (\gamma\xi + \delta)^{-1}(\alpha\xi + \beta), \tag{7}$$

где $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ — унитарные матрицы, в случае $\Phi(i)$ и $\Phi(e)$ связанные дополнительным условием унимодулярности.

Построенные геометрии естественно обобщаются на n-мерный случай. Для этого введем понятие аффинных пространств $A_n(i)$, $A_n(i, j)$, $A_n(e)$ и $A_n(i, e)$ и проективных пространств $P_n(i)$, $P_n(i, j)$, $P_n(e)$ и $P_n(i, e)$ над рассматриваемыми алгебрами**.

Точки аффинных пространств характеризуются системами n элементов $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$ соответственной алгебры, а точки проективных пространств характеризуются системами $n + 1$ элементов $\alpha\xi^0, \alpha\xi^1, \ldots, \alpha\xi^n$ соответственной алгебры, где α — произвольный элемент этой алгебры.

Будем называть унитарно-евклидовым пространством $U_n(i)$, $U_n(i, j)$, $U_n(e)$, $U_n(i, e)$ над алгебрами $\Phi(i)$, $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$ аффинное пространство над соответственной алгеброй, в котором определено расстояние d между точками ξ^i и η^i с помощью формулы

$$d^2 = \sum_i |\xi^i - \eta^i|^2 = \sum_i (\bar{\xi}^i - \bar{\eta}^i)(\xi^i - \eta^i) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{8}$$

Пространство $U_n(i)$ рассматривается во всех учебниках линейной алгебры. *Пространства $U_n(i)$, $U_n(i, j)$, $U_n(e)$ и $U_n(i, e)$ изометричны, соответственно, евклидовым пространствам R_{2n}, R_{4n} и псевдоевклидовым пространствам ${}^nR_{2n}$ и ${}^{2n}R_{4n}$*, что непосредственно следует из формул (5).

Группы движений пространств $U_n(i)$, $U_n(i, j)$, $U_n(e)$ и $U_n(i, j)$ при $n > 1$ представляются преобразованиями

$$'\xi^i = \sum_j \xi^i \alpha_j^i + \beta^i, \tag{9}$$

где α_j^i — унитарные матрицы n-го порядка. При $n > 1$ эти группы не изоморфны группам движений пространств R_{2n}, R_{4n}, ${}^nR_{2n}$ и ${}^{2n}R_{4n}$, а изоморфны некоторым подгруппам этих групп.

Будем называть унитарно-эллиптическим пространством $K_n(i)$, $K_n(i, j)$, $K_n(e)$, $K_n(i, e)$ над алгебрами $\Phi(i)$, $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$ проективное пространство над соответственной алгеброй, в котором определено расстояние d между точками ξ^i и η^i с помощью формулы

$$\cos^2 \frac{d}{r} = \frac{\sum_i \bar{\xi}^i \eta^i \cdot \sum_i \bar{\eta}^i \xi^i}{\sum_i \bar{\xi}^i \xi^i \cdot \sum_i \bar{\eta}^i \eta^i} \qquad (i = 0, \ldots, n). \tag{10}$$

---

* Сферическая метрика в алгебре $\Phi(e)$ рассматривалась И. М. и А. М. Ягломами (2).

** Пространства A_n и P_n можно строить и над более сложными алгебрами и аддитивными группами. Так, например, пространства A_n над группой векторов рассматривались Я. С. Дубновым (3); пространство P_1 над алгеброй матриц n-го порядка рассматривалось Ло-Кен Хуа (4).

Геометрия пространства $K_n(i)$ („пространства Фубини — Штуди") хорошо известна (см., например, ([5]), стр. 185).

Построенные пространства при $n=1$ представляют собой алгебры $\Phi(i)$, $\Phi(i, j)$, $\Phi(e)$, $\Phi(i, e)$ в введенных нами плоских и сферических метриках: (1) получается из (8) при $n=1$ непосредственно, формула (2) получается из (10) при $n=1$, если положить $\xi = \xi^{0^{-1}} \xi^1$, $\eta = \eta^{0^{-1}} \eta^1$.

Пространства $K_n(i)$, $K_n(i, j)$, $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ изометричны, соответственно, римановым пространствам V_{2n} и V_{4n} и псевдоримановым пространствам ${}^nV_{2n}$ и ${}^{2n}V_{4n}$. При $n > 1$ эти пространства не являются пространствами постоянной кривизны.

Группы движений пространств $K_n(i)$, $K_n(i, j)$, $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ представляются преобразованиями

$$'\xi^i = \sum_j \xi^j \alpha_j^i, \tag{11}$$

где α_j^i — унитарные матрицы $(n+1)$-го порядка, в случае $K_n(i)$ и $K_n(e)$ связанные дополнительным условием унимодулярности.

Группы движений пространств $K_n(i)$, $K_n(i, j)$, $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ являются простыми группами Ли: группы движений $K_n(i)$ и $K_n(e)$ — группы класса A, а группы движений $K_n(i, j)$ и $K_n(i, e)$ — группы класса C (([6]), стр. 289) (группы движений вещественных эллиптических пространств — простые группы Ли классов B и D).

Пространства $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ имеют важное значение для вещественной проективной и симплектической геометрии, что вытекает из следующих теорем:

Пространство $K_n(e)$ изометрично пространству пар точка + гиперплоскость вещественного проективного пространства P_n, если за расстояние между двумя парами точка + гиперплоскость принять их проективный инвариант.

Пространство $K_n(i, e)$ изометрично пространству прямых вещественного симплектического пространства Sp_{2n+1}, если за расстояние между двумя прямыми принять их симплектический инвариант.

Эти теоремы тесно связаны с тем фактом, что группы движений пространств $K_n(e)$ и $K_n(i, e)$ соответственно изоморфны группе проективных преобразований P_n и группе симплектических преобразований Sp_{2n+1}. Последняя из этих теорем является аналогом известной теоремы о группе движений пространства $K_n(i, j)$ и группе симплектических преобразований пространства K_{2n+1} (([7]), стр. 38).

В силу приведенных выше утверждений о метрике пространств $K_1(e)$ и $K_1(i, e)$, пространство пар точек P_1 изометрично сфере ${}^1S_2$ в ${}^1R_3$, а пространство прямых Sp_3 изометрично сфере ${}^2S_4$ в ${}^2R_5$. Эти результаты могут быть получены и непосредственно с помощью, соответственно, перенесения Гессе (([5]), стр. 200) и перенесения Плюккера (([5]), стр. 85).

Поступило
2 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] A. A. Albert, Ann. of Math., 43, 161 (1942). [2] И. М. Яглом и А. М. Яглом, ДАН, 53, № 5 (1946). [3] Я. С. Дубнов, Тр. семинара по векторн. и тензорн. анализу при МГУ, 1, 196 (1933). [4] Ло-Кен Хуа, ДАН, 53, 99, 199 (1946). [5] Ф. Клейн, Высшая геометрия, М.-Л., 1939. [6] Л. С. Понтрягин, Непрерывные группы, М.-Л., 1938. [7] К. Шевалле, Теория групп Ли, М., 1948.