Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

О. ЛОКУЦИЕВСКИЙ

ОБ ОТКРЫТЫХ ОТОБРАЖЕНИЯХ ПЛОСКИХ КОМПАКТОВ*

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1948)

Непрерывное отображение f топологического пространства X на топологическое пространство Y называется открытым, если образ каждого открытого в X множества есть множество, открытое в Y; квазимонотонным, если, каков бы ни был континуум $C \subseteq Y$ и какова бы ни была компонента K его прообраза, всегда $f(K) = C$.

Хопфу принадлежит следующая

Теорема. *Открытое отображение компакта есть отображение квазимонотонное.*

Доказательство содержится в (2).

Вопрос о возможности открытого отображения одного данного множества X на другое Y принадлежит к труднейшим в топологии даже в том случае, когда X и Y являются простейшими геометрическими фигурами. Так, до сих пор остается неизвестным, можно ли при $2 < p < q$ отобразить открыто p-мерный куб на q-мерный. Задача эта, имеющая важные приложения, например в теории непрерывных групп, для $p = 2$ была впервые решена Хопфом ценою преодоления больших трудностей: оказалось, что квадрат нельзя открыто отобразить на q-мерный куб, $q > 2$. Другое, также сложное доказательство этого факта дано в (2). Из теорем, доказанных в настоящей заметке, следует очень простое доказательство указанного результата Хопфа. При этом обнаруживается, что невозможно не только открытое, но даже и квазимонотонное отображение квадрата на q-мерный куб, $q > 2$, причем из свойств куба при этом оказывается существенным лишь то, что он является континуумом, содержащим некоторую очень простую одномерную фигуру ωT, которая сейчас будет определена.

Назовем треногою всякий континуум, гомеоморфный букве T (т. е., например, сумме отрезка $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$ оси абсцисс и отрезка $0 \leqslant y \leqslant 1$ оси ординат). Рассмотрим в трехмерном пространстве плоскости $z = 1/n$ и в каждой из них возьмем треногу T_n, состоящую из только что упомянутых двух отрезков. Сумма этих треног и такой же треноги T_0, построенной в плоскости $z = 0$, есть компакт и обозначается через ωT (очевидно, ωT есть топологическое произведение треноги на компакт, состоящий из точек 0 и $1/n$, $n = 1, 2, \ldots$, числовой прямой).

Теорема 1. *Если плоский компакт X может быть квазимонотонно отображен на треногу T, то X состоит лишь из конечного числа компонент.*

---

* Настоящая работа сделана под руководством П. С. Александрова.

Теорема 2 (основная). *Никакой плоский компакт не может быть квазимонотонно отображен на компакт, содержащий топологический образ множества* ωT.

Отсюда и из определения квазимонотонности вытекает

Следствие. *Если хоть одна компонента данного компакта X гомеоморфна плоскому множеству, то компакт X не может быть квазимонотонно отображен ни на какой континуум, содержащий топологический образ множества ωT (в частности, на куб).*

В этом следствии, очевидно, содержится невозможность открытого отображения плоского компакта на q-мерный куб, $q > 2$.

Прежде чем приступить к доказательству теоремы 1, сделаем несколько замечаний (для удобства вместо плоскости рассматриваем двумерную сферу S^2).

1°. Пусть $\{F_n\}$ есть последовательность континуумов, лежащих в S^2, причем существует $\operatorname{lt} F_n = F_0$. Если $F_0'' \subseteq F_0$ есть континуум такой, что $F_0 \setminus F_0'' \neq \Lambda$, но $F_n \cap F_0'' = \Lambda$* при любом n, то все F_n (кроме, быть может, конечного числа) принадлежат одной и той же компоненте $S^2 \setminus F_0''$. Граница этой компоненты совпадает с F_0''.

2°. Пусть $\Gamma \subseteq S^2$ есть гомеоморфный образ окружности и точки $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$. Обозначим простые дуги $p_1p_2 = \Gamma_3$, $p_2p_3 = \Gamma_1$, $p_3p_1 = \Gamma_2$, где $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \subseteq \Gamma$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = p_3$, $\Gamma_2 \cap \Gamma_3 = p_1$, $\Gamma_3 \cap \Gamma_1 = p_2$. Пусть, далее, H_1, H_2 суть компоненты $S^2 \setminus \Gamma$ и $R \subseteq \overline{H}_1$ есть континуум, не разбивающий S^2, причем $R \cap \Gamma = (p_1 \cup p_2 \cup p_3)$.

При этих условиях справедлива следующая

Лемма. $\Phi = R \cup \Gamma$ *разбивает* S^2 *ровно на 4 области* G_1, G_2, G_3, G_4, *причем при соответствующем выборе обозначений* $H_2 = G_4$ *и* $\Gamma_i \subseteq \overline{G}_i \cap \Gamma \subseteq \Gamma_i \cup p_i$ $(i = 1, 2, 3)$.

3°. Пусть теперь R_1 есть подконтинуум R, причем $R_1 \cap \Gamma = (p_2 \cup p_3)$. Обозначим $\Phi_1 = R_1 \cup \Gamma$; так как $\Phi_1 \subseteq \Phi$, то $G_1 \subseteq V_1$, где V_1 есть некоторая компонента $S^2 \setminus \Phi_1$. При этих условиях $\overline{V}_1 \cap \Gamma = \Gamma_1$.

Переходим к доказательству теоремы 1. Пусть $X \subseteq S^2$ и f есть квазимонотонное отображение X на $T = oa \cup ob \cup oc$, где oa, ob, oc суть отрезки, не имеющие попарно общих точек, кроме точки o. В противоречие с утверждением, допустим, что $X = \bigcup\limits_{\mu} X_\mu$, где X_μ суть компоненты X, причем число их не менее, чем счетно. В силу компактности X можно выделить топологически сходящуюся последовательность $X_{\mu n} = X_n$ ((¹), стр. 168). Обозначим $\operatorname{lt} X_n = X_0$. При этом можно предполагать, что $X_n \cap X_0 = \Lambda$. Пусть теперь точки $a', a'' \in oa$, $b' \in ob$, $c' \in oc$ выбраны произвольно, но так, что $o < a' < a'' < a$ (в силу естественного порядка на oa). Легко видеть, что отображение $f_n = f$ компакта X_n на T квазимонотонно. Обозначим O_n произвольную компоненту $f_n^{-1}(o)$; $(OA')_n$, $(OB')_n$, $(OC')_n$ суть те компоненты $f_n^{-1}(oa')$, $f_n^{-1}(ob')$, $f_n^{-1}(oc')$, соответственно, которые содержат O_n.

В силу квазимонотонности f_n, очевидно, $f_n^{-1}(a'a'') \cap (OA')_n \neq \Lambda$. Пусть $(A'A'')_n$ есть произвольная из тех компонент $f_n^{-1}(a'a'')$, которые пересекаются с $(OA')_n$. Аналогично $f_n^{-1}(a''a) \cap (A'A'')_n \neq \Lambda$, $f_n^{-1}(b'b) \cap (OB')_n \neq \Lambda$, $f_n^{-1}(c'c) \cap (OC')_n \neq \Lambda$; $(A''A)_n$, $(B'B)_n$, $(C'C)_n$ суть произвольные из тех компонент $f_n^{-1}(a''a)$, $f_n^{-1}(b'b)$, $f_n^{-1}(c'c)$, которые пересекаются с $(A'A'')_n$, $(OB')_n$, $(OC')_n$ соответственно.

---

* Через Λ обозначается пустое множество

Не нарушая общности, можно предполагать существование следующих топологических пределов: $\mathrm{lt}\,(OA')_n = (OA')_0$, $\mathrm{lt}\,(OB')_n = (OB')_0$, $\mathrm{lt}\,(OC')_n = (OC')_0$, $\mathrm{lt}\,(A'A'')_n = (A'A'')_0$, $\mathrm{lt}\,(A''A)_n = (A''A)_0$, $\mathrm{lt}\,(B'B)_n = (B'B)_0$, $\mathrm{lt}\,(C'C)_n = (C'C)_0$. При этом, очевидно, все рассматриваемые топологические пределы принадлежат X_0.

Кроме того, из квазимонотонности f, f_n легко следует, что $f[(OA')_n] = oa'$, $f[(OB')_n] = ob'$, $f[(OC')_n] = oc'$, $f[(A'A'')_n] = a'a''$, $f[(A''A)_n] = a''a$, $f[(B'B)_n] = b'b$, $f[(C'C)_n] = c'c$ (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$).

Легко видеть также, что $(OA')_0 \cap (OB')_0 \cap (OC')_0 \neq \Lambda$, $(OA')_0 \cap (A'A'')_0 \neq \Lambda$, $(A'A'')_0 \cap (A''A)_0 \neq \Lambda$, $(OB')_0 \cap (B'B)_0 \neq \Lambda$, $(OC')_0 \cap (C'C)_0 \neq \Lambda$.

Из непустоты пересечений слагаемых и теоремы Цоретти ([1], стр. 178) заключаем, что связны следующие множества: $F_n' = (OA')_n \cup (OB')_n \cup (OC')_n$, $F_n'' = F_n' \cup (A'A'')_n \cup (B'B)_n \cup (C'C)_n$, $F_n = F_n'' \cup (A''A)_n$ (здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$); связно также и $E = (OB')_0 \cup (OC')_0 \cup (B'B)_0 \cup (C'C)_0$.

Далее понадобятся следующие утверждения:

I. $\mathrm{lt}\,F_n = F_0$, $F_0 \setminus F_0'' \neq \Lambda$.

I'. $\mathrm{lt}\,F_n' = F_0'$.

II. Так как $f(F_0'') = oa'' \cup ob \cup oc$, то существуют точки $a_0'' \in f^{-1}(a'') \cap F_0''$, $b_0 \in f^{-1}(b) \cap F_0''$, $c_0 \in f^{-1}(c) \cap F_0''$. В силу непрерывности f можно выбрать окрестности U_1, U_2, U_3 точек a_0'', b_0, c_0 соответственно такие, что $f(U_1) \subseteq (a'a \setminus a')$, $f(U_2) \subseteq (b'b \setminus b')$, $f(U_3) \subseteq (c'c \setminus c')$. Тогда, очевидно, $U_1 \cap F_0'' \subseteq (A'A'')_0$, $U_2 \cap F_0'' \subseteq (B'B)_0$, $U_3 \cap F_0'' \subseteq (C'C)_0$, $F_0' \cap U_i = \Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$.

Можно предполагать, что $U_i \cap U_j = \Lambda$ при $i \neq j$; $i, j = 1, 2, 3$.

III. Если обозначить $A_0' = f^{-1}(a') \cap F_0'$, то $A_0' \cap (A'A'')_0 \neq \Lambda$.

В силу 1°, I и I' все F_n (кроме, быть может, конечного числа) принадлежат одной и той же компоненте $S^2 \setminus F_0''$. Обозначим эту компоненту через H. Тогда, в силу того же 1°, $\overline{H} \setminus H = F_0''$. Пусть $\tilde{F}_0'' = S^2 \setminus H$. Легко видеть, что $\tilde{F}_0''$ есть континуум. Выберем a_0'', b_0, c_0 и их окрестности U_1, U_2, U_3 соответственно, как указано в II. Так как $a_0'', b_0, c_0 \in F_0''$, то $U_i \cap H \neq \Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$.

Построим в H произвольную окружность Γ и обозначим H_1, H_2 компоненты $S^2 \setminus \Gamma$. Пусть, например, $\tilde{F}_0'' \subseteq H_1$. Легко доказать (так как $U_i \cap H \neq \Lambda$), что существуют непересекающиеся простые дуги $\Delta_1 = p_1p_1'$, $\Delta_2 = p_2p_2'$, $\Delta_3 = p_3p_3'$, где $p_1, p_2, p_3 \in \Gamma$, $p'_i \in U_i \cap (\overline{H} \setminus H)$, $\Delta_i \setminus (p_i \cup p_i') \subseteq H_1 \cap H$ $(i = 1, 2, 3)$. Так как $\overline{H} \setminus H = F_0''$, то из II следует, что:

II'. $p_1' \in (A'A'')_0$.

II''. $p_2' \in (B'B)_0$, $p_3' \in (C'C)_0$.

II'''. $p_i' \overline{\in} F_0'$ $(i = 1, 2, 3)$.

Обозначим $R = \tilde{F}_0'' \cup (\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \Delta_3)$; $R \subseteq \overline{H}_1$, $R \cap \Gamma = (p_1 \cup p_2 \cup p_3)$, и в силу леммы Александера ([3]) $S^2 \setminus R$ связно. Поэтому из 2° следует, что $S^2 \setminus \Phi$ (где $\Phi = R \cup \Gamma$) есть сумма четырех компонент G_1, G_2, G_3, $G_4 = H_2$.

Из II''' легко следует, что $F_0' \cap \Delta_i = \Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$. А так как, кроме того, $F_0' \subseteq H_1$, то существует окрестность $U = U(F_0')$ такая, что $U \subseteq H_1$ и $U \cap \Delta_i = \Lambda$ $(i = 1, 2, 3)$.

Из I' заключаем, что для всех n (кроме, быть может, конечного числа) $F_n' \subseteq U$ и, следовательно, $F_n' \cap \Delta_i = \Lambda$, $F_n' \cap \Gamma = \Lambda$. Но $F_n' \subseteq H$, и поэтому $F_n' \cap \Phi = \Lambda$.

В силу теоремы Янишевского ([1], стр. 176) каждый из F_n' целиком лежит в одной из G_1, G_2, G_3. Пусть, например, G_1 содержит бесконечное число F_n'.

Тогда:

IV. $F_0' = \mathrm{lt}\, F_n' \subseteq \overline{G}_1$,

и в обозначениях 2°:

IV'. $\Gamma_1 \subseteq \overline{G}_1 \cap \Gamma \subseteq \Gamma \cup p_1$.

Рассмотрим $R_1 = E \cup \Delta_2 \cup \Delta_3$, $\Phi_1 = R_1 \cup \Gamma$. Из II'' следует, что R_1 есть континуум. Так как $R_1 \cap \Gamma = (p_2 \cup p_3)$, то, в силу 3°:

V. $\overline{V}_1 \cap \Gamma = \Gamma_1$ (здесь V_1 есть компонента $S^2 \setminus \Phi_1$, содержащая G_1).

В силу IV $F_0' \subseteq \overline{V}_1$, в частности $A_0' = f^{-1}(a') \cap F_0' \subseteq \overline{V}_1$. Легко видеть, что $A' \cap \Phi_1 = \Lambda$, и поэтому $A_0' \subseteq V_1$. Из III, связности $(A'A'')_0$ и из $(A'A'')_0 \cap \Phi_1 = \Lambda$ заключаем, что $(A'A'')_0 \subseteq V_1$. Следовательно, в силу II', $p_1' \in V_1$. Если теперь $p_1'x \subseteq \Delta_1$ есть произвольная простая дуга, не содержащая точки p_1, то $p_1'x \cap \Phi_1 = \Lambda$, и поэтому $p_1'x \in V_1$. Отсюда $p_1 \in \overline{V}_1$, что противоречит V.

Доказательство теоремы 2. В противоречие с утверждением допустим, что существует квазимонотонное отображение f некоего компакта $X \subseteq S^2$ на компакт Y, содержащий подмножество Y_0, гомеоморфное ωT. Обозначим через X_0 прообраз Y_0. Нетрудно показать, что отображение X_0 на Y_0 квазимонотонно.

Не нарушая общности, можно полагать Y_0 совпадающим с ωT. Число компонент X_0, очевидно, не менее, чем счетно. Отображение g множества ωT на T определяется формулой $g\left(x, y, \frac{1}{n}\right) = (x, y, 0)$.

Очевидно, g квазимонотонно; легко видеть, что квазимонотонно также и отображение gf, а это противоречит теореме 1.

Поступило
16 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] Ф. Хаусдорф, Теория множеств, 1937. [2] G. T. Whyburn, Analytic Topology, N.-Y., 1942. [3] J. W. Alexander, Trans. Am. Math. Soc., 23, 333 (1922).