Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

И. П. ЕГОРОВ

О ГРУППАХ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВ НЕСИММЕТРИЧЕСКОЙ АФФИННОЙ СВЯЗНОСТИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XII 1948)

Пусть в многообразии $x^1, x^2, \ldots, x^n$ определено пространство аффинной связности объектом перенесения $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$, в котором симметрия по нижним индексам β, γ отсутствует: $\Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]} \neq 0$.

Это пространство допускает движения, порождаемые инфинитезимальным оператором

$$XF = v^1(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial F}{\partial x^1} + v^2(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial F}{\partial x^2} + \ldots$$
$$\ldots + v^n(x^1, x^2, \ldots, x^n)\frac{\partial F}{\partial x^n}, \tag{1}$$

если имеют место уравнения

$$v^{\alpha}_{,\beta} = u^{\alpha}_{\beta}, \tag{2}$$

$$u^{\alpha}_{\beta,\gamma} - R^{\alpha}_{\beta\gamma\sigma} v^{\sigma} = 0, \tag{3}$$

$$D_L \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0, \tag{4}$$

где ковариантное дифференцирование производится по объекту связности $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$, а под знаком лиевого дифференцирования D_L входит тензор кручения $\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma} = \Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$, $R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ — тензор кривизны пространства $\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$.

Тензор кривизны $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}$ заданного пространства $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ записывается в форме

$$\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} + \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma\delta}, \tag{5}$$

где

$$\Omega^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} = \Omega^{\alpha}_{\beta\delta,\gamma} - \Omega^{\alpha}_{\beta\gamma,\delta} + \Omega^{\alpha}_{\rho\gamma}\Omega^{\rho}_{\beta\delta} - \Omega^{\alpha}_{\rho\delta}\Omega^{\rho}_{\beta\gamma}. \tag{6}$$

Известно [1], что если операторы X_1F, X_2F удовлетворяют уравнениям (2), (3), (4), то этим уравнениям будет удовлетворять и оператор $(X_1X_2)F$. Применяя дифференцирование Ли [2], запишем условия интегрируемости уравнений (2), (3) и (4), определяющих движения, в виде (уравнения (4), выражающие связи над функциями v^α, u^α_β, здесь составляют первую серию):

$$
\begin{aligned}
&1) && D_L\,\Omega^\alpha_{\beta\gamma}=0,\\
&2) && D_L\,R^\alpha_{\beta\gamma\delta}=0,\\
& && D_L\,\Omega^\alpha_{\beta\gamma,\,\mu_1}=0, \qquad (7)\\
& && \dots\dots\dots\\
& && \dots\dots\dots\\
&N) && D_L\,R^\alpha_{\beta\gamma\delta,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_{N-2}}=0,\\
& && D_L\,\Omega^\alpha_{\beta\gamma,\,\mu_1,\,\mu_2,\,\dots,\,\mu_{N-2}\mu_{N-1}}=0.
\end{aligned}
$$

Необходимым и достаточным условием существования полных групп движений порядка r (групп максимального порядка для заданного пространства) является существование целого положительного числа N, для которого ранги первых N и $N+1$ серий условий интегрируемости (7) относительно v^α, u^α_β равны n^2+n-r.

Рассмотрение матрицы

$$\left\| T^1_1\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{pmatrix},\ T^1_2\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{pmatrix},\ \dots,\ T^1_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{pmatrix},\ \dots,\ T^n_n\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{pmatrix}\right\|, \qquad (8)$$

где

$$T^\sigma_\tau\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\,\gamma\end{pmatrix}=\delta^\sigma_\beta\,\Omega^\alpha_{\tau\gamma}+\delta^\sigma_\gamma\,\Omega^\alpha_{\beta\tau}-\delta^\alpha_\tau\,\Omega^\sigma_{\beta\gamma},$$

являющейся укороченной матрицей системы уравнений (4), относящейся к неизвестным $u^\alpha_\beta=v^\alpha_{,\beta}$, приводит к следующим двум вспомогательным предложениям алгебраического характера.

Лемма 1. *Для любой составляющей тензора кручения $\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3}$ $(\alpha_i\neq\alpha_j)$ можно отнести минор n-го порядка матрицы* (8), *величина которого равна степени этой составляющей.*

Доказательство следует из того, что элементы минора, отнесенного столбцам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_1\end{pmatrix},\ \dots,\ \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_1\end{pmatrix}$$

и строчкам

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_2\\ \alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\alpha_3\\ \alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},\ \dots,\ \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix},$$

будут вида

$$T^{\alpha_1}_{\alpha_i}\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \alpha_2\,\alpha_3\end{pmatrix}=-\,\delta^j_i\,\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_2\alpha_3}.$$

Лемма 2. *Если ранг матрицы* (8) *меньше n, то для любой составляющей тензора кручения $\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_1\alpha_2}$ можно отнести минор n-го порядка, равный степени данной составляющей.*

Искомым минором является минор, отвечающий строчкам

$$\binom{\alpha_2}{\alpha_2\,\alpha_1},\ \binom{\alpha_1}{\alpha_1\,\alpha_2},\ \binom{\alpha_1}{\alpha_1\,\alpha_3},\ \ldots,\ \binom{\alpha_1}{\alpha_1\,\alpha_n}$$

и столбцам

$$\binom{\alpha_2}{\alpha_1},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_2},\ \binom{\alpha_2}{\alpha_3},\ \ldots,\ \binom{\alpha_2}{\alpha_n}.$$

Здесь будем иметь

$$T^{\alpha_1 i}_{\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\alpha_1\,\alpha_j} = \delta^i_j\,\Omega^{\alpha_1}_{\alpha_1\,\alpha_2}$$

для всех индексов $i,\ j \geqslant 2$, и, в силу леммы 1 и предположения относительно ранга матрицы (8),

$$T^{\alpha_1 i}_{\alpha_2}\binom{\alpha_2}{\alpha_2\,\alpha_1} = 0 \qquad (i \geqslant 2).$$

С помощью отмеченных свойств матрицы (8) мы приходим к следующему выводу (в предположении $n \geqslant 2$):

Теорема. *Максимальный порядок полных групп движений пространств несимметрической аффинной связности равен* n^2.

В самом деле, из лемм 1, 2 следует, что максимальный порядок полных групп движений указанных пространств, с одной стороны, не выше n^2.

С другой стороны, группа порядка n^2

$$\begin{gathered} p_1,\ p_2,\ p_3,\ \ldots,\ p_{n-1},\ p_n, \\ x^i p_j\ (i,\ j = 1, 2,\ \ldots,\ n-1), \\ x^n p_1,\ x^n p_2,\ x^n p_3,\ \ldots,\ x^n p_{n-1}, \end{gathered}$$

является полной группой движений пространства, для которого

$$\begin{gathered} \Lambda^1_{1n} = \Lambda^2_{2n} = \Lambda^3_{3n} = \ldots = \Lambda^{n-1}_{n-1\,n} = a + b, \\ \Lambda^1_{n1} = \Lambda^2_{n2} = \Lambda^3_{n3} = \ldots = \Lambda^{n-1}_{n\,n-1} = a - b, \\ \Lambda^n_{nn} = 2a, \text{ остальные } \Lambda^\alpha_{\beta\gamma} = 0. \end{gathered}$$

Буквы a, b $(\neq 0)$ означают произвольные постоянные. Составляющие тензора кривизны (5) этого пространства будут

$$\Lambda^1_{nn1} = \Lambda^2_{nn2} = \Lambda^3_{nn3} = \ldots = \Lambda^{n-1}_{nn\,n-1} = -(a-b)^2,$$

остальные $\Lambda^\alpha_{\beta\gamma\delta} = 0$, ч. т. д.

Отсюда следует, кроме того, что пространства несимметрической аффинной связности, обладающие группами движений максимального порядка, могут быть и нулевой и ненулевой кривизны.

Указанные свойства сильно отличают эти пространства от пространств с симметрической аффинной связностью [3]; для последних случаю $r = n^2 + n$ отвечает только аффинно-евклидово пространство, максимальный порядок r полных групп движений всех остальных пространств симметрической аффинной связности равен n^2.

В случае пространств с полной группой движений порядка n^2, как показывают рассмотрения о коллинеациях в пространствах проективной связности (4), имеет место следующая

Теорема. *Пространства симметрической аффинной связности, допускающие полные группы движений порядка n^2, являются проективно-евклидовыми пространствами.*

Поступило
11 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] L. P. Eisenhart, Non Riemannian Geometry, 1927. [2] Б. Л. Лаптев, Изв. физ.-математ. об-ва при Казанск. ун-те, **10**, сер. 3 (1938). [3] И. П. Егоров, ДАН, **57**, № 9 (1947). [4] И. П. Егоров, ДАН, **61**, № 4 (1948).