Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

А. ГУРЕВИЧ и В. РОХЛИН

ОБ АПРОКСИМАЦИИ НЕПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОТОКОВ ПЕРИОДИЧЕСКИМИ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 17 XII 1948)

1. Известно, что фазовое пространство динамической системы с заданной в нем инвариантной мерой, конечной для всего пространства, при весьма широких и естественных предположениях изометрично отрезку прямой с обычной мерой Лебега. Поэтому в вопросах чисто метрической теории динамических систем можно считать основное пространство отрезком.

Итак, пусть I — единичный отрезок с обычной лебеговской мерой μ. Взаимно-однозначное преобразование отрезка I, обладающее тем свойством, что как оно, так и обратное ему преобразование переводит всякое измеримое множество в измеримое множество той же меры, мы называем **автоморфизмом**. Группу степеней T^n ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$) автоморфизма T мы рассматриваем как простейшую динамическую систему — динамическую систему с дискретным временем. Динамическая система с **непрерывным** временем или **поток** $\{S_t\}$ ($-\infty < t < +\infty$) есть однопараметрическая группа автоморфизмов S_t: для любой точки $x \in I$ и любых вещественных значений s, t справедливо равенство $S_s S_t x = S_{s+t} x$. Поток предполагается **измеримым**: каково бы ни было измеримое множество $A \subset I$, множество тех точек (x, t) плоской полосы $x \in I$, $-\infty < t < +\infty$, для которых $S_t x \in A$, измеримо относительно обычной плоской меры Лебега (¹).

Динамические системы, отличающиеся друг от друга только на (инвариантном) множестве меры нуль, естественно объединяются в один класс. Множество всех таких классов мы будем обозначать в случае автоморфизмов через $\mathfrak{A}$, в случае потоков — через $\mathfrak{A}'$ и, ради краткости, будем называть элементы множеств $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}'$ просто автоморфизмами и потоками.

Автоморфизм T называется **периодическим** в точке $x \in I$, если существует натуральное число n, для которого $T^n x = x$; наименьшее из таких чисел называется **периодом** автоморфизма T в точке x. Автоморфизм, имеющий период p во всех точках отрезка I, называется периодическим автоморфизмом с периодом p. **Поток** $\{S_t\}$ называется периодическим в точке $x \in I$, и притом имеющим период p в этой точке (p есть положительное вещественное число), если при $0 \leqslant t < p$ все точки $S_t x$ различны между собой, а при $s \equiv t \pmod p$ всегда $S_s x = S_t x$. Поток, имеющий период p во всех точках отрезка I, называется периодическим потоком с периодом p. Периодические динамические системы настолько просты по своему строению, что при изучении ряда вопросов теории оказалось целесообразным апроксимировать ими динамические системы общего вида. Для автоморфизмов достаточно сильная апроксимационная теорема была получена Халмошом (²). Примем за расстояние $d(T, U)$ двух автоморфизмов T, $U \in \mathfrak{A}$ меру множества тех точек $x \in I$, в которых $Tx \neq Ux$. Этим мы превратим $\mathfrak{A}$ в (полное) метрическое пространство $\mathfrak{A}_d$. Халмош доказал, что для всякого нигде не периодического автоморфизма T и всякого натурального числа p можно найти такой периодический автоморфизм P с периодом p, что $d(T, P) \leqslant 4/p$. В действительности ([3]) расстояние произвольного нигде не периодического автоморфизма T до множества $\mathfrak{P}_p$ всех периодических автоморфизмов с периодом p равно даже $1/p$: $d(T, \mathfrak{P}_p) = 1/p$.

Эту апроксимационную теорему мы и хотим перенести на потоки.

2. Примем за расстояние $d(\{R_t\}, \{S_t\})$ двух потоков $\{R_t\}, \{S_t\} \in \mathfrak{A}'$ внешнюю меру множества тех точек $x \in I$, в которых хотя бы для одного значения t из интервала $0 < t \leqslant 1$ имеет место неравенство $R_t x \neq S_t x$. Тогда $\mathfrak{A}'$ превратится в полное метрическое пространство $\mathfrak{A}'_d$. Наша апроксимационная теорема утверждает, что *расстояние произвольного нигде не периодического потока* $\{S_t\}$ *до множества* $\mathfrak{P}'_p$ *всех периодических потоков с периодом* p *равно* $1/p$:

$$d(\{S_t\}, \mathfrak{P}'_p) = 1/p.$$

3. Автоморфизм T называется п е р е м е ш и в а н и е м, если для любых двух измеримых множеств A, B

$$\mu(T^n A \cdot B) \to \mu A \cdot \mu B \quad (n \to \infty),$$

и п е р е м е ш и в а н и е м в ш и р о к о м с м ы с л е, если при любых A, B

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}[\mu(T^k A \cdot B) - \mu A \cdot \mu B]^2 \to 0 \quad (n \to \infty).$$

П о т о к $\{S_t\}$ есть перемешивание, если

$$\mu(S_t A \cdot B) \to \mu A \cdot \mu B \quad (t \to \infty),$$

и перемешивание в широком смысле, если

$$\frac{1}{\tau}\int_0^{\tau}[\mu(S_t A \cdot B) - \mu A \cdot \mu B]^2 dt \to 0 \quad (\tau \to \infty)$$

(см. ([1])). Обозначим через $\mathfrak{N}$ множество всех нигде не периодических автоморфизмов в $\mathfrak{A}$, через $\mathfrak{M}_0$ — множество всех перемешиваний в $\mathfrak{A}$ в широком смысле и через $\mathfrak{M}_1$ — множество всех перемешиваний в $\mathfrak{A}$ в собственном смысле. Далее, обозначим через $\mathfrak{N}'$ множество нигде не периодических потоков в $\mathfrak{A}'$, через $\mathfrak{M}'_0$ — множество всех перемешиваний в широком смысле в $\mathfrak{A}'$ и через $\mathfrak{M}_1'$ — множество всех перемешиваний в собственном в смысле в $\mathfrak{A}'$. Мы имеем: $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}' \supset \mathfrak{M}'_0 \supset \mathfrak{M}'_1$. Множества $\mathfrak{N}$ и $\mathfrak{N}'$ (будучи нигде не плотными) замкнуты в своих пространствах $\mathfrak{A}_d$ и $\mathfrak{A}'_d$, т. е. представляют собой полные метрические пространства. В ([3]) было указано, что $\mathfrak{M}_0$ есть всюду плотное G_δ в $\mathfrak{N}$, а $\mathfrak{M}_1$ имеет в $\mathfrak{N}$ первую категорию. Эти утверждения доказываются с помощью апроксимационной теоремы, формулированной в n°1. Таким же образом с помощью апроксимационной теоремы n°2 можно показать, что *множество* $\mathfrak{M}'_0$ *есть всюду плотное* G_δ *в* $\mathfrak{N}'$, *а* $\mathfrak{M}_1'$ *имеет в* $\mathfrak{N}'$ *первую категорию.*

Поступило
16 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] E. H o p f, Ergodentheorie, Berlin, 1937. [2] P. R. H a l m o s, Ann. of Math., (2), **45**, 784 (1944). [3] В. Р о х л и н, ДАН, **60**, № 3 (1948).