Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

П. А. ГОЛЬБЕРГ

СИЛОВСКИЕ БАЗЫ П-ОТДЕЛИМЫХ ГРУПП

(Представлено академиком О. Ю. Шмидтом 15 XII 1948)

I. В работе [1] С. А. Чунихин существенно обобщил основные результаты Ф. Голла [2] о свойстве S_m-подгрупп разрешимых групп (S_m-подгруппой группы G Ф. Голл называет такую подгруппу, порядок и индекс которой в G взаимно простые числа). Если под конечной П-отделимой группой G, где П — некоторое множество простых чисел, понимать группу, в каждый индекс композиционного ряда которой не могут входить степени двух различных простых чисел из множества П, то результат С. А. Чунихина можно сформулировать следующим образом (см. [1]):

Если $m > 1$ такой делитель порядка g П-отделимой группы G, что $(m, g/m) = 1$ и если все простые делители m входят в П, то G имеет подгруппы порядка m, причем все они сопряжены в G.

Результаты 2.1 и 2.2 работы [2] Голла для разрешимых групп следуют из указанной теоремы Чунихина, когда П содержит простые делители порядка g группы.

Используя указанные свойства S_m-подгрупп разрешимых групп, Ф. Голл [3] получил аналогичные результаты для силовских баз (максимально ранга — см. определение 1 настоящей работы) конечных групп.

Конечная разрешимая группа G содержит по крайней мере одну силовскую базу, причем любые две силовские базы группы G сопряжены между собой.

Основной результат настоящей работы (теорема 1) объединяет указанные результаты С. А. Чунихина о S_m-подгруппах П-отделимых групп и Ф. Голла о силовских базах разрешимых групп. Можно было бы эту теорему доказать, опираясь на эти результаты С. А. Чунихина и Ф. Голла. Мы, однако, даем доказательство, независимое от них.

II. Определение 1. Множество подгрупп

$$S^{(p_1)},\ S^{(p_2)},\ \ldots,\ S^{(p_k)},\ \ldots \qquad \text{(S)}$$

периодической группы G, где $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots$ — простые числа, называется силовской базой ранга $(p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots)$ этой группы, если эти группы удовлетворяют следующим условиям:

1) $S^{(p_i)}$, $i = 1, 2, \ldots, k, \ldots$, силовские подгруппы группы G.

2) В порядок любого элемента подгруппы, порожденной подгруппами $S^{(p_{n_1})}, S^{(p_{n_2})}, \ldots, S^{(p_{n_r})}$, могут входить только простые числа $p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_r}$.

Множество подгрупп (S) будем называть **силовской базой максимального ранга**, если, кроме указанных условий, выполняется условие:

3) Группа G порождается подгруппами (S).

III. **Теорема 1.** *Конечная П-отделимая группа G содержит по крайней мере одну силовскую базу любого ранга, принадлежащего множеству П; любые две силовские базы одного и того же ранга, принадлежащего П, сопряжены между собой.*

Доказательство. Будем доказывать теорему индукцией по порядку группы.

Пусть $h = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_l^{\alpha_l}$ есть порядок П-отделимой группы и

$$(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k), \quad k \leqslant l \tag{1}$$

некоторое множество простых чисел, входящих в П. Докажем, что G содержит по крайней мере одну силовскую базу ранга (1).

Если $k = 1$, то утверждение следует из теоремы Силова. Если же $k > 1$, то группа G содержит нетривиальный нормальный делитель H, в индекс которого не входят два различных простых числа из множества П. Пусть в указанный индекс входит простое число из множества (1), например, p_1. По допущению группа H содержит силовскую базу

$$S_1',\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_k \tag{2}$$

ранга (1), где S_1' имеет порядок $p^{\alpha_1'}$, $\alpha_1' < \alpha_1$, а остальные подгруппы являются силовскими в G.

Так как H является нормальным делителем в G и, по допущению, в H все силовские базы одного и того же ранга из П сопряжены между собой, то индексы нормализаторов $S(G)$ и $S(H)$ множества подгрупп (2) в G и H равны между собой; обозначим этот индекс через $d = p_1^{\beta} d_1$, $(p_1,\ d_1) = 1$. Поэтому $S(G)$ и $S(H)$ содержат силовские подгруппы P_1 и P_2, где $P_2 \subset P_1$, соответственно порядков $p_1^{\alpha_1-\beta}$ и $p^{\alpha_1'-\beta}$. Так как

$$S_1' \cap P_1 = P_2, \quad S_1'P_1 = P_1S_1' \text{ и } S_iP_1 = P_1S_i, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ k,$$

то

$$S_1 = S_1'P_1,\ \ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_k \tag{3}$$

есть силовская база ранга (1) в G.

Пусть

$$\overline{Q}_1,\ \overline{Q}_2,\ \ldots,\ \overline{Q}_k \tag{4}$$

есть другая силовская база ранга (1) группы G. По допущению, в G существует такой элемент a, что

$$S_1' = H \cap S_1 = H \cap a^{-1}\overline{Q}_1 a, \quad S_i = a^{-1}\overline{Q}_i a, \quad i = 2,\ 3,\ \ldots,\ k.$$

В таком случае подгруппы

$$Q_1,\ S_2,\ S_3,\ \ldots,\ S_k, \tag{5}$$

где

$$Q_1 = a^{-1}\overline{Q}_1 a, \qquad S_1' = H \cap Q_1, \tag{6}$$

образуют силовскую базу, сопряженную с силовской базой (4). Для доказательства теоремы достаточно, следовательно, доказать сопряженность силовских баз (3) и (5).

Рассмотрим два случая.

1) $k<l$.

Обозначим $M=\{S_1, S_2, \ldots, S_k\}$ и $N=\{Q_1, S_2, \ldots, S_k\}$.

В силу условий (6)

$$M\cap H=N\cap H=M',$$

причем M' является нормальным делителем в M и N, т. е. M и N принадлежат нормализатору подгруппы M' в G. В этом нормализаторе можно найти силовские p_1-подгруппы D и $\overline{D}$ и такой элемент b, что

$$M=\{M', D\},\quad N=\{M', \overline{D}\},\quad b^{-1}\overline{D}b=D.$$

Поэтому подгруппы M и N сопряжены в G; при этом силовская база (5) перейдет в некоторую силовскую базу подгруппы M. Эта последняя силовская база по допущению ($k<l$) сопряжена с силовской базой (3). Тем самым силовские базы (3) и (5) сопряжены между собой.

2) $k=l$.

Обозначим $M_i=\{S_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k\}$ и $N_i=\{Q_1, S_2, \ldots, S_{i-1}, S_{i+1}, \ldots, S_k\}$, $i=2, 3, \ldots, k$.

Докажем, что в G для каждого $i=2, 3, \ldots, k$ существует элемент c_i, удовлетворяющий следующим трем условиям: a) $c_i\in S_i$, b) $c_i^{-1}S_jc_i=S_j$, $j=2, 3, \ldots, k$; c) $c_i^{-1}N_ic_i=M_i$.

В самом деле, так как $k-1<l$, то, по доказанному, M_i и N_i сопряжены в G. Но $G=N_iS_i$ ($k=l$). Поэтому можно считать, что элемент c_i, переводящий N_i в M_i, принадлежит S_i. Покажем теперь, что условие b) есть следствие двух других условий.

$$c_i^{-1}S_jc_i\subset\{S_j, S_i\}\quad\text{и}\quad c_i^{-1}S_jc_i\subset M_i,\quad j\neq i,$$

следовательно,

$$c_i^{-1}S_jc_i\subseteq\{S_j, S_i\}\cap M_i=S_j\quad\text{и}\quad c_i^{-1}S_jc_i=S_j.$$

Покажем, наконец, что элемент $c=c_2c_3\ldots c_k$ переводит силовскую базу (5) в силовскую базу (3). Из a) и b) следует, что

$$c^{-1}S_ic=S_i,\quad i=2, 3, \ldots, k,$$

а из условий a) и c)

$$c^{-1}Q_1c=(c_{i+1}\ldots c_k)^{-1}c_i^{-1}(c_2\ldots c_{i-1})^{-1}Q_1(c_2\ldots c_{i-1})c_i(c_{i+1}\ldots c_k)\subset$$

$$\subset(c_{i+1}\ldots c_k)^{-1}c_i^{-1}N_ic_i(c_{i+1}\ldots c_k)=(c_{i+1}\ldots c_k)^{-1}M_i(c_{i+1}\ldots c_k)=M_i,$$

$$i=2, 3, \ldots, k.$$

Отсюда следует, что

$$c^{-1}Q_1c\subseteq M_2\cap M_3\cap\ldots\cap M_k=S_1.$$

Поэтому $c^{-1}Q_1c=S_1$. Теорема доказана.

IV. Методами, используемыми автором в работе (4), можно основную теорему о силовских базах конечных групп перенести на локально нормальные группы.

Определение 2. Группа G называется локально Π-отделимой, если каждое конечное подмножество ее элементов лежит в конечной Π-отделимой подгруппе группы G.

Теорема 2. *Локально нормальная и локально Π-отделимая группа G содержит по крайней мере одну силовскую базу любого ранга, принадлежащего множеству Π; любые две силовские базы одного и того же ранга, принадлежащего Π, локально сопряжены в G.*

Из этой теоремы непосредственно следует

Теорема 3. *Если локально нормальная группа G локально Π-отделима, то она по любому множеству простых чисел Π', входящих в множество Π, содержит по крайней мере одну силовскую Π'-подгруппу и любые две силовские Π'-подгруппы локально сопряжены в G.*

Можно также обобщить теорему 8 работы (4).

Теорема 4. *Если G локально нормальная и локально Π-отделимая группа, H — силовская Π'-подгруппа, $\Pi' \subseteq \Pi$, группы G, имеющая конечное число сопряженных подгрупп в G, то любые две силовские Π'-подгруппы сопряжены в G.*

Поступило
14 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] С. А. Чунихин, ДАН, 59, № 3 (1948). [2] P. Hall, J. Lond. Math. Soc., 3, 98 (1928). [3] P. Hall, Proc. Lond. Math. Soc., 43, 316 (1937). [4] П. А. Гольберг, Матем. сб., 19 (61): 3, 451 (1946).