Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 5

МАТЕМАТИКА

Я. Л. ГЕРОНИМУС

О ЗАМКНУТОСТИ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ L_σ^p

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 16 XII 1948)

I. Обозначим через D конечную область комплексной плоскости x, ограниченную замкнутой спрямляемой кривой Жордана C длиною l; обозначим через $\sigma(s)$ некоторую ограниченную, неубывающую на отрезке $[0, l]$ функцию длины дуги s кривой C. Пусть L_σ^p обозначает пространство комплекснозначных функций

$$f(\xi) = f[\xi(s)], \qquad \xi \in C, \tag{1}$$

с нормой

$$\| f \| = \left\{ \int_C | f(\xi) |^p d\sigma(s) \right\}^{\frac{1}{p}} < +\infty, \quad p \geqslant 1, \tag{2}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега — Стильтьеса.

Обозначим через $\mathfrak{M} \subset L_\sigma^p$ следующую систему функций:

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2, \quad \mathfrak{M}_1 = \{f_\alpha(\xi)\varphi_n^{(\alpha)}(\xi)\}, \quad \mathfrak{M}_2 = \{\psi_\beta(\xi)\}, \tag{3}$$

где α и β пробегают независимо друг от друга конечное, счетное или континуальное множество значений; значок n пробегает счетное множество значений; $\{\varphi_n^{(\alpha)}(x)\}$ — аналитические функции, регулярные в области $D' \supset D$, обладающие тем свойством, что всякая аналитическая функция $\varphi(x)$, регулярная в замкнутой области $\overline{D}$, может быть разложена на C в равномерно сходящийся ряд

$$\varphi(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n^{(\alpha)}(\xi). \tag{4}$$

Настоящая заметка посвящена вопросу о замкнутости системы функций $\mathfrak{M} \subset L_\sigma^p$ в пространстве L_σ^p.

Первая задача о замкнутости системы функций была поставлена и решена В. А. Стекловым ([1]); в частности, им рассмотрен случай, когда $\mathfrak{M} = \{\xi^n\}_0^\infty$, C — отрезок вещественной оси, а функция $\sigma(s)$ абсолютно непрерывна.

Затем В. И. Смирнов ([3]) рассмотрел эту же задачу при $d\sigma(s) = ds$ для спрямляемых контуров C, подчиненных некоторому условию.

П. П. Коровкин ([4]) обобщил этот результат на случай абсолютно непрерывной функции $\sigma(s)$ *.

А. Н. Колмогоров ([5,6]), пользуясь теорией стационарных случайных последовательностей, рассмотрел тот случай, когда $p=2$, C — единичная окружность, а $\mathfrak{M}=\{e^{i\nu\theta}\}_0^\infty$ или $\mathfrak{M}=\{e^{\pm i\nu\theta}\}_1^\infty$. Первая из этих задач была обобщена М. Г. Крейном ([7]) при помощи теории операторов в гильбертовом пространстве — у него $p=2$, C — единичная окружность, а система $\mathfrak{M}$ такова: $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1=\{f_\alpha(\theta)\,e^{in\theta}\}_0^\infty$ **. Случай любого $p\geqslant 1$ был впервые рассмотрен Н. И. Ахиезером ([8,9]) — у него снова C — единичная окружность, а $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}_1=\{e^{i\nu\theta}\}_0^\infty$ ***.

II. Пусть функция $x=\psi(w)$ конформно отображает область D на область $|w|<1$ и пусть $w=\gamma(x)$ обратная функция. Обозначим через E_p класс аналитических функций $f(x)$, для которых $f[\psi(w)]\sqrt[p]{\psi'(w)}\in H_p$; пусть $f_0(\xi)$ одна из функций $f_\alpha(\xi)$ в (3).

Теорема 1. *Для незамкнутости системы $\mathfrak{M}$ в пространстве L^p_σ необходимо и достаточно существование такой аналитической функции $\lambda_0(x)\in E_1$, чтобы ее граничная функция*

$$\lambda_0(\xi)=\lim_{x\to\xi}\lambda_0(x),\quad x\in D,\quad \xi\in C, \tag{5}$$

удовлетворяла следующим условиям:

$$1)\qquad \int_C\left|\frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)\sqrt[p]{\sigma'(s)}}\right|^q|d\xi|<\infty,\qquad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1; \tag{6}$$

$$2)\qquad \int_C\frac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)}\psi_\beta(\xi)\,d\xi=0,\quad \psi_\beta(\xi)\in\mathfrak{M}_2; \tag{7}$$

3) *функции $\lambda_\alpha(\xi)=\dfrac{\lambda_0(\xi)}{f_0(\xi)}f_\alpha(\xi)$ должны являться граничными функциями для функций $\lambda_\alpha(x)\in E_1$.*

Примечание. Если C — спрямляемая дуга Жордана, то система $\mathfrak{M}=\{\xi^n\}_0^\infty$ замкнута в пространстве L^p_σ при любой функции $\sigma(s)$ и любом $p\geqslant 1$. Этот результат при $p=2$ вытекает из более общих результатов М. Г. Крейна и М. А. Красносельского ([10]).

III. Рассмотрим теперь более простой необходимый критерий незамкнутости, который в некоторых случаях является и достаточным.

Теорема 2. *Условие*

$$\int_C\lg\{\sigma'(s)|f_0(\xi)|^p\}\,|\gamma'(\xi)\,d\xi|>-\infty, \tag{8}$$

необходимое для незамкнутости системы $\mathfrak{M}$ в пространстве L^p_σ, достаточно для того, чтобы можно было построить функцию

---

* В ([3]) и ([4]) рассматривается замкнутость системы $\mathfrak{M}$ не во всем пространстве L^p_σ, а в подпространстве аналитических функций, регулярных в D и имеющих почти всюду на C предельные значения, для которых выполняется условие (2) с абсолютно непрерывной функцией $\sigma(s)$.

** М. Г. Крейн указывает в ([7]), что всю его теорию (при $p=2$) можно построить для произвольной замкнутой кривой Жордана (без предположения о ее спрямляемости).

*** В ([5–9]) функция $\sigma(s)$ не предполагается абсолютно непрерывной.

$\lambda_0(x) \in E_1$, *предельные значения которой удовлетворяют почти всюду на C соотношению*

$$|\lambda_0(\xi)| = \lim_{x \to \xi} |\lambda_0(x)| = \sigma'(s)\, |f_0(\xi)|^p, \quad x \in D, \quad \xi \in C; \tag{9}$$

если, кроме того, выполняются условия 2), 3) *теоремы* 1, *то система* $\mathfrak{M}$ *незамкнута в пространстве* L^p_σ.

Рассмотрим несколько частных случаев теорем 1 и 2; будем предполагать в дальнейшем, что точка $x = 0$ лежит в области D; пусть

$$\mathfrak{M} = \{\xi^\nu\}_{-\infty}^{+\infty} - \{\xi^{r_k}\}_1^m, \tag{10}$$

где целые числа $\{r_k\}_1^m$ ограничены хоть с одной стороны; пусть, например

$$-\infty \leqslant r_m < r_{m-1} < \ldots < r_2 < r_1 < +\infty. \tag{11}$$

Теорема 3. *Для незамкнутости системы* $\mathfrak{M}$ (10) *в пространстве* L^p_σ *при условии* (11) *необходимо и достаточно, чтобы можно было построить функцию* $\lambda_0(x) \in E_1$, *которая имела бы следующую форму:*

$$\lambda_0(x) = \sum_{k=1}^{m} \mu_k x^{r_1 - r_k} \tag{12}$$

и удовлетворяла бы условию

$$\int_C \left| \frac{\lambda_0(\xi)}{\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| < +\infty. \tag{13}$$

В частности, если m — конечное число, то для незамкнутости системы $\mathfrak{M}$, *получаемой вычеркиванием из системы* $\{\xi^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *конечного числа функций, необходимо и достаточно существование полинома* $\lambda_0(x)$ (12) *степени не выше* $r_1 - r_m$, *удовлетворяющего условию* (13).

Отсюда вытекает следующая

Теорема 4. *Если k — наибольшее положительное число, для которого справедливо неравенство*

$$\int_C \{\sigma'(s)\}^{-k} |d\xi| < +\infty, \tag{14}$$

то при $p \geqslant 1 + \frac{1}{k}$ *система* $\mathfrak{M} = \{\xi^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ *минимально замкнута в пространстве* L^p_σ, *т. е. становится незамкнутой после вычеркивания одной функции.*

Точно так же для того, чтобы система $\mathfrak{M} = \{\xi^n\}_{-\infty}^{+\infty}$ после вычеркивания одной функции стала минимально замкнутой в пространстве L^p_σ, необходимо и достаточно, чтобы интеграл

$$\int_C \left| \frac{a\xi^t + b}{\sqrt[p]{\sigma'(s)}} \right|^q |d\xi| \tag{15}$$

существовал хоть для одного целого и положительного t и $a \neq 0$, и не существовал для $a = 0$, $b \neq 0$.

Рассмотрим еще один частный случай, представляющий значительный интерес.

Теорема 5. *Условие*

$$\int_C \lg \sigma'(s) \mid \gamma'(\xi)\, d\xi \mid > -\infty \tag{16}$$

необходимо и достаточно для незамкнутости системы $\mathfrak{M} = \{\xi^n\}_0^\infty$ *в пространстве* L_σ^p.

Поступило
27 XI 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] В. И. Смирнов, Юбилейн. сборник АН СССР, 1, 186, 1947. [2] Н. М. Гюнтер, Сб. Памяти В. А. Стеклова, 1928. [3] В. И. Смирнов, Журн. Ленингр. физ.-мат. об-ва, 2, в. 1, 155 (1928). [4] П. П. Коровкин, Матем. сб., 9 (51): 3, 469 (1941). [5] А. Н. Колмогоров, Бюлл. МГУ, Математика, 2, в. 6 (1941). [6] А. Н Колмогоров, Изв. АН СССР, сер. матем., 5, № 1, 3 (1941). [7] М. Г. Крейн, ДАН, 46, № 3 (1945). [8] Н. И. Ахиезер, ДАН, 50, 35 (1945). [9] Н. И. Ахиезер, Лекции по теории апроксимации, М., 1947. [10] М. Г. Крейн и М. А. Красносельский, Усп. матем. наук, 2, 3 (19), 60 (1947).