Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

К. П. СТАНЮКОВИЧ

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГАЗА В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 6 XII 1948)

Мы будем рассматривать автомодельные движения газа с учетом его собственного внутреннего гравитационного поля. В этом случае уравнения газовой динамики имеют вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p=\operatorname{grad}\varphi,\\
\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho u)=0,\\
\frac{\partial s}{\partial t}+u\operatorname{grad}s=0.
\end{gathered}
\tag{1}
$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; u — скорость газа; $s=p\rho^{-k}$ — величина, характеризующая энтропию газа.

Потенциал поля φ определяется уравнением Пуассона:

$$\Delta\varphi+4\pi G\rho=0. \tag{2}$$

Поскольку ускорение силы тяжести $g=\operatorname{grad}\varphi$, причем $\operatorname{div}g=-4\pi G\rho$, то первое уравнение (1) примет вид:

$$\operatorname{div}\left[\frac{\partial u}{\partial t}+(u\nabla)u+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}p\right]+4\pi G\rho=0. \tag{3}$$

В случае движений с центральной симметрией уравнения принимают вид:

$$
\begin{gathered}
\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r\left[\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}\right]+4\pi G\rho=0,\\
\frac{\partial\ln\rho}{\partial t}+u\frac{\partial\ln\rho}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}=0,\\
\frac{\partial\ln p}{\partial t}+u\frac{\partial\ln p}{\partial r}+k\left[\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{2u}{r}\right]=0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Введем:

$$x=u\frac{t}{r},\quad y=\frac{p}{\rho}\frac{t^2}{r^2}; \tag{5}$$

тогда уравнения (4) после небольших преобразований примут вид:

$$\left[\dot{x} - x + x^2 + 2y + xx' + y' + y\frac{\rho'}{\rho}\right]' +$$

$$+ 3\left[\dot{x} - x + x^2 + 2y + xx' + y' + y\frac{\rho'}{\rho}\right] + 4\pi G\rho t^2 = 0,$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + x\frac{\rho'}{\rho} + x' + 3x = 0, \qquad \frac{\dot{y}}{y} + x\frac{y'}{y} + (k-1)x' + (3k-1)x = 2. \qquad (6)$$

Здесь, например, $\dot{x} = \partial x / \partial \ln t$, $x' = \partial x / \partial \ln r$.

Система уравнений (6) позволяет сравнительно просто изучать так называемые автомодельные движения газа.

Положим:

$$x = x(z), \quad y = y(z), \quad \rho t^2 = \eta(z), \quad \text{где } z = rt^{-a}. \qquad (7)$$

Тогда уравнения (6) примут вид:

$$\left[x'(x-a) - x + x^2 + 2y + y' + y\frac{\eta'}{\eta}\right]' +$$

$$+ 3\left[x'(x-a) - x + x^2 + 2y + y' + y\frac{\eta'}{\eta}\right] + 4\pi G\eta = 0,$$

$$\frac{\eta'}{\eta}(x-a) - a + x' + 3x = 0, \quad \frac{y'}{y}(x-a) + (k-1)x' + (3k-1)x = 2. \quad (8)$$

Здесь, например, $x' = dx / d\ln z$.

В случае, когда $s = s_0 = \text{const}$, $p = s_0\rho^k$, постоянный показатель степени $a = 2 - k$.

Исключая из этих уравнений $d\ln z$, мы сможем свести, после некоторых преобразований, задачу к интегрированию одного уравнения 3-го порядка и к квадратурам.

Перейдем к изучению некоторых типов автомодельных движений. Сначала рассмотрим наиболее простой случай, когда $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(a \to \infty)$. Уравнения (8) при этом принимают вид:

$$3(\dot{x} - x + x^2 + 2y) + 4\pi G\rho t^2 = 0, \quad \frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3x, \quad \frac{\dot{y}}{y} = 2 - (3k-1)x. \ (9)$$

Пусть $\rho t^2 = \eta(t)$; уравнения (9) при этом примут вид:

$$\dot{x} - x + x^2 + 2y + \frac{4}{3}\pi G\eta = 0, \quad \frac{\dot{\eta}}{\eta} = 2 - 3x, \quad \frac{y'}{y} = 2 - (3k-1)x;$$

отсюда $y\eta^{k-\frac{1}{3}}\, t^{\frac{2}{3}(4-3k)} = \text{const}$, или

$$p\rho^{k-\frac{4}{3}} = \frac{r^2}{t^4}\,\text{const}. \qquad (10)$$

Исключая $d\ln t$, придем к уравнениям:

$$-\frac{d\ln t}{dx} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi G\eta + 2y + x^2 - x} + \frac{d\eta}{dx}\frac{1}{\eta(3x-2)} = \frac{dy}{dx}\frac{1}{y[(3k-1)x-2]}. \quad (11)$$

Другой частный случай, когда $x = x(r)$, $y = y(r)$, $\rho t^2 = \eta(r)$, определяется уравнениями (8), если в них положить $a = 0$.

Тогда второе уравнение (8) имеет вид:

$$\frac{\eta'}{\eta} = -\left(3 + \frac{x'}{x}\right),$$

что дает $\eta r^3 x = \text{const}$. или

$$\rho u = \frac{\text{const}}{r^2 t^3}. \tag{12}$$

Исключая из других уравнений $d \ln r$ и η, придем в результате к одному уравнению 2-го порядка и к квадратуре.

Найденные решения имеют ряд важных астрофизических приложений.

Большой интерес представляют движения, для которых

$$u = \frac{r}{t}. \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что единственным решением основной системы уравнений (4) будут соотношения:

$$p = A_1 \frac{r^{2(\alpha+1)}}{t^{2(\alpha+3)}}, \quad \rho = A_2 \frac{r^\alpha}{t^{3+\alpha}}, \tag{14}$$

$\left(\text{т. е. решение будет автомодельным, } a = \frac{\alpha+1}{\alpha},\ y = z^\alpha\right)$, причем при этом должно выполняться условие (следующее из первого уравнения (4)):

$$(\alpha + 1)(\alpha + 3) = -\frac{A_2^2}{A_1} 2\pi G. \tag{15}$$

Отсюда также следует, что должно выполняться условие

$$-1 < \alpha < -3. \tag{16}$$

Данное решение показывает, что при определенном распределении p и ρ движение происходит как инерциальное в случаях, когда p слабее растет к центру симметрии (при заданном распределении ρ); скорость частиц газа будет уменьшаться с расстоянием для определенной части газа (и обратно).

В случае $u \equiv 0$ $p = p(r)$, $\rho = \rho(r)$ и первое из уравнений (4) после преобразований в случае, когда $p = s_0 \rho^k$, приводится к уравнению типа уравнения Эмдена ([1]):

$$(\rho^{k-1} r)'' + a^2 (\rho r) = 0, \tag{17}$$

где $a^2 = \dfrac{4\pi G (k-1)}{k s_0}$.

В случае $k = 2$ это уравнение имеет, как известно, простое решение:

$$\rho = \frac{A_1 \sin ar + A_2 \cos ar}{r}. \tag{18}$$

Для произвольных k уравнение (17) можно привести, вводя $\rho^{k-1} = \xi r^{\frac{2(k-1)}{k-2}}$, к виду:

$$\xi'' + \frac{5k-6}{k-2} \xi' + \frac{2(k-1)(3k-4)}{(k-2)^2} \xi + a^2 \xi^{\frac{1}{k-1}} = 0 \tag{19}$$

(здесь производные по $\ln r$).

Очевидно, что в случае $k = 6/5$ уравнение (19) непосредственно интегрируется.

Введем $\xi' = \theta$, тогда $\theta'_\xi \theta = \frac{\xi}{4} - a^2 \xi^5$; отсюда $\theta = \sqrt{\frac{\xi^2}{4} - \frac{a^2 \xi^6}{3} + \xi_0}$.

Отсюда

$$\ln \frac{r}{r_0} = \int \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{\xi^2}{4} - \frac{a^2 \xi^6}{3} - \xi_0}}, \tag{20}$$

где $\xi_0 = \text{const}$, $r_0 = \text{const}$.

В этом случае $a = \sqrt{\frac{2\pi G}{3 s_0}}$, $\rho = \xi^5 r^{-\frac{5}{2}}$.

Заметим, что, поскольку в уравнения газовой динамики в случае $s = \text{const}$ p входит под знаком дифференциала, то всегда возможно адиабату $p = s_0 \rho^k$ апроксимировать уравнением $p = \bar{s}_0 \rho^{k_0} + \text{const}$, причем, имея решения для $k = 2$ и $k = 6/5$, легко вычислить решения для любого k.

В заключение укажем, что возможен еще и другой тип автомодельных движений.

Введем: $x = u / r$, $y = p / \rho r^2$. Тогда уравнения (7) примут вид:

$$r \left(\dot{x} + x^2 + xx'r + 2y + 2y' + y \frac{\rho' r}{\rho} \right)'_r +$$

$$+ 3 \left(\dot{x} + x^2 + xx'r + 2y + 2y' + y \frac{\rho' r}{\rho} \right) + 4\pi G \rho = 0,$$

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} + x \frac{\rho' r}{\rho} + 3x + rx' = 0, \quad \frac{\dot{y}}{y} + x \frac{y' r}{y} + (k-1) r x' + (3k-1) x = 0. \tag{21}$$

Положим, что

$$x = x(z), \quad y = y(z), \quad \rho = \eta(z),$$

где

$$z = r e^{-at}. \tag{22}$$

Тогда уравнения (21) примут вид:

$$\left[(x - a) x' + x^2 + 2y + y' + y \frac{\eta'}{\eta} \right]' +$$

$$+ 3 \left[(x - a) x' + x^2 + 2y + y' + y \frac{\eta'}{\eta} \right] + 4\pi G \eta + 0,$$

$$(x - a) \frac{\eta'}{\eta} + 3x + x' = 0, \quad (x - a) \frac{y'}{y} + (k - 1) x' + (3k - 1) x = 0. \tag{23}$$

Здесь, например, $x' = dx / d \ln z$.

Дальнейшие преобразования в отдельных частных случаях не отличаются в принципе от проделанных нами выше.

Поступило
6 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] R. Emden, Gaskugeln, Leipzig, 1907.