Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

ГИДРОМЕХАНИКА

Ю. Б. РУМЕР

КОЛЬЦЕОБРАЗНЫЙ ТУРБУЛЕНТНЫЙ ИСТОЧНИК

(Представлено академиком Л. Д. Ландау 1 X 1948)

Рассмотрим свободный поток, который образуется при истечении жидкости через узкую кольцеобразную щель (рис. 1), прорезанную в цилиндрической поверхности.

Выберем цилиндрическую систему координат, совместив ось с осью кольца; поместим начало координат в его центре.

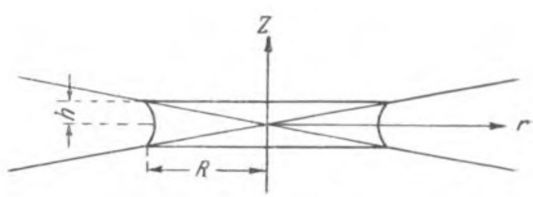

Рис. 1

Радиальную составляющую скорости обозначим через u, а осевую — через v. В плоскости симметрии струи ($z=0$) осевая составляющая скорости $v=0$; на границе струи, наоборот, радиальная составляющая скорости $u=0$. Пусть $\psi(z,r)$ есть функция тока; тогда будет:

$$u = \frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad v = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}. \tag{1}$$

Давление в струе неизменно; поэтому полное количество движения секундной массы жидкости, проходящей через цилиндрическую поверхность радиуса r, должно оставаться постоянным:

$$\int_0^\infty \rho uv\, 2\pi r\, dz = 2\pi Rh\rho u_0^2 = \text{const}, \tag{2}$$

где R — радиус щели, h — полуширина щели, u_0 — начальная скорость истечения, ρ — плотность жидкости.

Для изучения струи воспользуемся, как и в случае плоской или круглой струи, координатами r, $\varphi = z/ar$, где a — некоторая безразмерная постоянная, характеризующая степень турбулентности струи. Величина структурной постоянной a будет нами в дальнейшем увязана с величиной c, входящей по Прандтлю в выражение для турбулентного напряжения.

Как и в случае плоской струи, сделаем предположение, что радиальная скорость в точке с координатами r, z может быть записана в координатах r, φ в виде $u(r, z) = u_m(r) f(\varphi)$. Область изменения координат r, φ будет: $0 < r < \infty$, $0 < \varphi < \varphi_{\text{гр}}$, где $\varphi_{\text{гр}}$ — значение φ на границе струи.

Как видно из рис. 1, выражение (3) предполагает, что полуширина щели h связана с радиусом кольца R соотношением:

$$h / R = a\varphi_{\text{гр}}. \tag{3}$$

В этом и только в этом случае полюс струи будет совпадать с центром кольца. Однако мы будем считать предположение (3) верным и в тех случаях, если будет $h \gtrless aR\varphi_{гр}$. Очевидно, что ошибка будет тем меньше, чем больше отношение r/R, т. е. чем дальше от кольца лежит рассматриваемая точка; ниже мы рассматриваем расстояния, большие по сравнению с радиусом кольца.

Найдем теперь величину радиальной скорости $u_m(r)$ в плоскости симметрии струи. Подстановка в (2) дает:

$$2\pi\rho u_m^2(r)\, r^2 a \int_0^{\varphi_{гр}} f^2(\varphi)\, d\varphi = 2\pi\rho R h u_0^2 .$$

Отсюда получаем

$$u_m = u_0 \frac{R_0}{r}; \qquad R_0 = \frac{\sqrt{Rh/a}}{\int_0^{\varphi_{гр}} f^2(\varphi)\, d\varphi} . \tag{4'}$$

Величина интеграла, стоящего в знаменателе, будет нами в дальнейшем вычислена и окажется равной 0,685.

Поэтому формула (4′) может быть переписана так:

$$u_m = u_0 \frac{R_0}{r}; \qquad R_0 = 1{,}46 \sqrt{\frac{Rh}{a}} . \tag{4}$$

Для определения осевой скорости v найдем из (1) и (2) выражение для функции тока ψ. Имеем:

$$ru = u_0 R_0 f(\varphi) = \frac{\partial\psi}{\partial z}; \quad \psi = a u_0 r R_0 \int f(\varphi)\, d\varphi = r a u_0 R_0 F(\varphi)$$

и, следовательно:

$$rv = a u_0 R_0 \frac{\partial}{\partial r} (rF(\varphi)).$$

Итак, для радиальной и осевой составляющей скорости мы имеем выражения:

$$u = \frac{u_0 R_0}{r} F'(\varphi); \quad v = \frac{a u_0 R_0}{r} (F'(\varphi)\varphi - F(\varphi)) . \tag{5}$$

Для решения задачи нам необходимо составить и решить уравнение для функции $F(\varphi)$. Применим для этого закон количества движения, выделим контрольную поверхность, состоящую из двух цилиндрических поверхностей радиусов r, $r + dr$, простирающихся от плоскости $z = \text{const}$ до границы струи и кольцеобразного донышка площади $2\pi r\, dr$.

Через донышко переносится в единицу времени количество движения $dQ_1 = \rho u v\, 2\pi r\, dr$. Через цилиндрическую поверхность радиуса r — количество движения $Q_2 = \int_z^{z_{гр}} \rho u u\, 2\pi r\, dz$. Через цилиндрическую поверхность радиуса $r + dr$ в это же время уносится количество движения $Q_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial r} dr$. Следовательно, внутрь поверхности S поступает в единицу времени количество движения $dQ_1 - \frac{\partial Q_2}{\partial r} dr$.

По теории импульсов, выписанное выше выражение равно силе от касательных турбулентных напряжений, приложенных к площади донышка. Имеем уравнение

$$dQ_1 - \frac{\partial Q_2}{\partial r}\, dr = \tau\, 2\pi r\, dr. \qquad (6)$$

Для величины касательных турбулентных напряжений принимаем теорию Тольмина:

$$\tau = -c^2 \rho r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2,$$

где c — коэффициент, характеризующий турбулентность потока. Подставляя в (6) выражения Q_1 и Q_2, сокращая на $\rho 2\pi r\, dr$, получим:

$$uv - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_z^{z_{\text{гр}}} u^2 r dz + c^2 r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = 0. \qquad (6')$$

Вычислим входящие в (6′) три члена:

$$uv = au_m^2 F'(\varphi)\,[F'(\varphi)\,\varphi - F(\varphi)],$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\int\limits_z^{z_{\text{гр}}} u^2 r\, dz = -au_m^2 F'^2(\varphi)\,\varphi, \quad c^2 r^2 \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \frac{u_m^2}{a^2}.$$

Подстановка этих трех выражений в уравнение (6′) дает после сокращения на u_m^2 / a^2 основное дифференциальное уравнение

$$c^2 F''^2 - a^3 F F' = 0.$$

Если мы теперь распорядимся постоянной a так, чтобы было $a^3 = c^2$, то мы получим уравнение:

$$F''^2 - FF' = 0, \qquad (7)$$

совпадающее с уравнением Тольмина для случая плоской струи.

Мы можем теперь сделать следующее заключение:

1. Распределение радиальной скорости в плоскости симметрии струи совпадает с законом распределения осевой скорости в случае круглой струи, т. е. скорость убывает обратно пропорционально расстоянию от полюса.

2. Распределение радиальной скорости по координате φ совпадает с распределением продольной скорости по координате φ в случае плоской струи.

3. Распределение осевой скорости по координате φ отличается от распределения поперечной скорости в плоской задаче. В то время как в плоской задаче мы имеем: $v = au_m (F'(\varphi)\,\varphi - {}^1/_2 F(\varphi))$, в задаче с кольцеобразным источником $v = au_m (F'\varphi - F)$.

4. Связь структурной постоянной a с постоянной c в плоской задаче будет $a^3 = 2c^2$, а в нашем случае $a^3 = c^2$.

Составим граничные условия, которым должно удовлетворять решение уравнения (7):

1) В плоскости симметрии струи должна исчезнуть осевая скорость. Поэтому будет: $\varphi = 0$, $F'(\varphi) = 1$, $F(\varphi) = 0$.

2) На границе струи должна исчезать радиальная скорость. Поэтому будет: $\varphi = \varphi_{\text{гр}}$, $F'(\varphi_{\text{гр}}) = 0$, $F(\varphi_{\text{гр}}) = F_{\text{гр}}$.

Перепишем уравнение (7) в виде

$$F'' = -\sqrt{FF'}. \qquad (8)$$

где знак перед корнем выбран отрицательным потому, что $F'' \cong du/dz$ отрицательно. Преобразуем уравнение, выбрав в качестве независимой переменной F. Положим $p = F'$, получим:

$$p \frac{dp}{dF} = -\sqrt{pF} \cdot$$

Отсюда имеем, учитывая пограничное условие:

$$p^{3/2} = 1 - F^{3/2}.$$

Подставляя $p = dF/d\varphi$, получаем для φ выражение:

$$\varphi = \int_0^F \frac{dF}{p} = -\int_1^p \frac{dp}{\sqrt{p}\,\sqrt[3]{1-p^{3/2}}}.$$

Значение $\varphi_{гр}$ получаем в виде интеграла Эйлера второго рода:

$$\varphi_{гр} = \int_0^1 p^{-1/2}\left(1-p^{3/2}\right)^{-1/3} dp = \frac{2}{3}\,\Gamma({}^1/_3)\,\Gamma({}^2/_3) = \frac{4\pi}{3\sqrt{3}}.$$

Вычисление φ как функции от p приводит к элементарному интегрированию:

$$\varphi = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{2\eta - 1}{\sqrt{3}}\right),$$

где введено обозначение $\sqrt{p} = \frac{\eta}{\sqrt[3]{1+\eta^3}}$.

Вычислим, наконец, интеграл:

$$\int_0^{\varphi_{гр}} f^2(\varphi)\,d\varphi = \int_0^{\varphi_{гр}} \left(\frac{dF}{d\varphi}\right)^2 d\varphi = \int_0^1 p\,dF = \int_0^1 \left(1 - F^{3/2}\right) dF = \frac{[\Gamma(2/3)]^2}{\Gamma(1/3)} = 0{,}685.$$

Результаты расчетов по полученным формулам даны в табл. 1.

Таблица 1

φ	F'	Φ	F	F''	φ	F'	Φ	F	F''
0	1	0	0	0	1,3	0,300	0,490	0,880	−0,520
0,1	,979	0,000	0,100	−0,230	1,4	0,249	0,354	0,910	−0,485
0,2	0,940	0,005	0,200	−0,410	1,5	0,200	0,620	0,930	−0,440
0,3	0,897	0,020	0,287	−0,500	1,6	0,165	0,680	0,950	−0,400
0,4	0,842	0,040	0,370	−0,560	1,7	0,125	0,740	0,950	−0,536
0,5	0,782	0,065	0,450	−0,600	1,8	0,095	0,800	0,965	−0,310
0,6	0,721	0,100	0,520	−0,620	1,9	0,067	0,850	0,970	−0,260
0,7	0,660	0,140	0,590	−0,630	2,0	0,046	0,900	0,980	−0,220
0,8	0,604	0,180	0,650	−0,630	2,1	0,030	0,935	0,985	−0,170
0,9	0,538	0,233	0,710	−0,625	2,2	0,020	0,955	0,990	−0,120
1,0	0,474	0,290	0,760	−0,610	2,3	0,009	0,990	0,995	−0,070
1,1	0,411	0,356	0,810	−0,585	2,4	0	1	1	0
1,2	0,357	0,424	0,860	−0,610					

$$u = u_m F(\varphi); \quad v = a u_m \Phi(\varphi).$$

Поступило
3 VII 1948