Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

М. М. ПОСТНИКОВ

КЛАССИФИКАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ТРЕХМЕРНОГО ПОЛИЭДРА В ОДНОСВЯЗНЫЙ ПОЛИЭДР ПРОИЗВОЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ

(Представлено академиком И. Г. Петровским 11 XII 1948)

В настоящей заметке дается классификация отображений произвольного связного односвязного трехмерного полиэдра K в связный полиэдр Y произвольной размерности. Зафиксируем некоторую триангуляцию полиэдра K и будем поэтому называть его комплексом.

А. Отображение f комплекса K в полиэдр Y называется нормальным, если все одномерные симплексы полиэдра K отображаются в некоторую точку полиэдра Y. Очевидно, что любое отображение гомотопно нормальному.

Б. Если f — нормальное отображение полиэдра K в полиэдр Y, то отображение f, рассматриваемое как отображение двумерного ориентированного симплекса $\sigma^2 \in K$, определяет некоторый элемент $d(f, \sigma^2)$ двумерной гомотопической группы $\pi^2(Y)$ полиэдра Y. Цепь

$$d^2(f) = \sum_{\sigma^2 \in K} d(f, \sigma^2)\, \sigma^2$$

над группой $\pi^2(Y)$ является ∇-циклом и называется характеристическим циклом нормального отображения f. Если два нормальных отображения гомотопны, то их характеристические циклы гомологичны. Обращение этого предложения верно только частично. Именно, если два нормальных отображения имеют гомологичные характеристические циклы, то существуют нормальные отображения, гомотопные данным и совпадающие на всех двухмерных симплексах комплекса K. О таких отображениях мы будем говорить, что они образуют нормальную пару. Таким образом, для полной классификации отображений достаточно определить, когда отображения, составляющие нормальную пару, гомотопны.

В. Итак, пусть два нормальных отображения f и g составляют нормальную пару. Рассмотрим какой-нибудь трехмерный ориентированный симплекс $\sigma^3 \in K$. Возьмем два экземпляра σ_0^3 и σ_1^3 этого симплекса и склеим их границы. Получим трехмерную ориентированную сферу. Отобразим эту сферу в Y так, чтобы σ_0^3 отображалось при помощи отображения f, а σ_1^3 при помощи g. Очевидно, что так определенное отображение однозначно и непрерывно. Оно определяет элемент $d(f, g;\ \sigma^3)$ трехмерной гомотопической группы $\pi^3(Y)$ полиэдра Y. Цепь

$$d^3(f, g) = \sum_{\sigma^3 \in K} d(f, g;\ \sigma^3)\, \sigma^3$$

комплекса K над группой $\pi^3(Y)$ назовем цепью, отличающей отображения f и g. Как цепь максимальной размерности, она является ∇-циклом.

Г. В (1) Уайтхед определил произведение элементов группы $\pi^2(Y)$, принадлежащее $\pi^3(Y)$. Если в K задан определенный порядок вершин, то произведение Уайтхеда порождает александеровское произведение (2) цепей комплекса K над группой $\pi^2(Y)$, являющееся цепью над группой $\pi^3(Y)$. Это произведение мы будем обозначать знаком $\cup$. Известно, что для классов гомологий $\cup$-произведение не зависит от порядка вершин.

Д. Известно, что $\pi_2(Y)$ является группой с конечным числом образующих, т. е. распадается в прямую сумму циклических групп. Выберем в каждом прямом слагаемом образующую α_i $(i=1, 2, \ldots, q)$. Пусть ее порядок равен a_i. Пусть α_i задается отображением φ_i ориентированной двумерной сферы S_i^2 в полиэдр Y. Каждой сфере S_i^2 сопоставим трехмерную ориентированную сферу S_i^3 и ее отображение ψ_i на сферу S_i^2 с хопфовским инвариантом единица. Тогда отображение $\varphi_i\psi_i$ этой сферы в полиэдр Y определит элемент β_i группы $\pi^3(Y)$. Л. С. Понтрягин (3) доказал, что порядок элемента β_i делит $2a_i$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — аддитивная группа прямой суммы p колец целых чисел. Единицу i-го слагаемого обозначим через 1_i. Рассмотрим гомоморфные отображения ξ и η группы $\mathfrak{G}$ в группы $\pi^2(Y)$ и $\pi^3(Y)$, соответственно, определенные формулами:

$$\xi(1_i) = \alpha_i, \qquad \eta(1_i) = \beta_i.$$

Отображения ξ и η порождают гомоморфные отображения $\tilde{\xi}$ и $\tilde{\eta}$ группы цепей комплекса K над группой $\mathfrak{G}$ в группы цепей над группами $\pi^2(Y)$ и $\pi^3(Y)$, соответственно.

Пусть e^1 — одномерный ∇-цикл комплекса K над группой $\pi^2(Y)$. Обозначая через e_0^1 такую цепь над группой $\mathfrak{G}$, что $\tilde{\xi}e_0^1 = e$, положим:

$$w^3(e_0^1) = \tilde{\eta}(e_0^1 \cup \nabla e_0^1).$$

Здесь знак $\cup$ обозначает александеровское произведение, порожденное умножением элементов группы $\mathfrak{G}$. Как цепь максимальной размерности цепь $w^3(e_0^1)$ является ∇-циклом. Оказывается, что ее класс гомологий $\{w^3(e_0^1)\}$ не зависит от выбора цепи e_0^1, а зависит только от класса гомологий $\{e^1\}$ цикла e^1. Поэтому законно класс $\{w^3(e_0^1)\}$ обозначить через $\{e^1\} * \{e^1\}$. Заметим, что $2w^3(e_0^1) = 0$. Можно доказать, что класс $\{e^1\} * \{e^1\}$ не зависит и от порядка вершин в K.

Е. Основная теорема. *Два отображения f и g, составляющие нормальную пару, тогда и только тогда гомотопны, когда существует такой одномерный ∇-цикл e^1 над группой $\pi^2(Y)$, что*

$$\{d^3(f, g)\} = \{e^1\} \cup \{d^2\} + \{e^1\} * \{e^1\}.$$

Здесь $d^2 = d^2(f) = d^2(g)$.

Таким образом задача классификации решена.

Поступило
9 XII 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] J. H. C. Whitehead, Ann. of Math., 42, 409 (1941). [2] Александер, Усп. матем. наук, нов. сер., 2, в. 1, 156 (1947). [3] Л. С. Понтрягин, ДАН, 34, 39 (1942).