Доклады Академии Наук СССР
1949. Том LXIV, № 4

МАТЕМАТИКА

П. С. НОВИКОВ

ОБ АКСИОМЕ ПОЛНОЙ ИНДУКЦИИ

(Представлено академиком Н. Н. Лузиным 16 XI 1948)

В настоящей статье мы рассматриваем арифметику в виде логического исчисления, получаемую присоединением к логике предикатов символов предметных функций, аксиом равенства и порядка, аксиомы полной индукции и рекурсивных определений.

Вопрос, о котором будет итти речь, состоит в том, какие формулы арифметики выводимы без аксиомы полной индукции, а какие нет. Аксиомы порядка можно выбирать по-разному. Мы будем для них требовать, чтобы они не содержали переменных предикатов, а из индивидуальных предикатов содержали только $x<y$ и $x=y$.

Если из некоторой системы аксиом арифметики удалить аксиому полной индукции, то аксиомы порядка могут быть, вообще говоря, пополнены новыми независимыми аксиомами порядка. Однако можно указать такую систему аксиом порядка, которая вместе с одной из аксиом равенства, именно $x=y\to(A(x)\to A(y))$, будет полна в классе формул, не содержащих переменных предикатов, а из индивидуальных предикатов содержащих только $=$ и $<$. Вместе с указанной аксиомой равенства эта аксиома состоит из следующих аксиом:

$$
\begin{gathered}
x=y\to(A(x)\to A(y)),\\
x<y\to(y<z\to x<z),\\
x<x',\\
x<y\to\overline{y<x'},\\
\overline{x<\overline{0}},\\
\overline{x=0}\to(\mathrm{E}y)(y'=x).
\end{gathered}
\tag{α}
$$

Эта система аксиом рассмотрена в [1]. Заметим, что если удалить последнюю аксиому, то оставшаяся система аксиом является полной в классе формул, не содержащих переменных предикатов, индивидуальных предикатов, кроме $x=y$ и $x<y$, и кванторов существования. Присоединим к системе аксиом (α) еще рекурсивные определения и выпишем схемы рекурсивных равенств:

$$\theta_h(x_1,\ldots,x_n)=h, \tag{1}$$

где h — произвольная рекурсивная константа,

$$\psi_i(x_1,\ldots,x_n)=x_i,\quad i\leqslant n, \tag{2}$$

и, наконец,

$$f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \tag{3}$$

$$f(x_1, \ldots, x_n') = \mathrm{X}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)). \tag{4}$$

Здесь символ $f(x_1, \ldots, x_n)$ должен вводиться после того, как введены $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $\mathrm{X}(x_1, \ldots x_n, t)$.

Полученную систему обозначим (β). Если из системы (β) удалить аксиому $x=0 \rightarrow (\mathrm{E}y)(y' = x)$, то образовавшуюся систему будем обозначать (β'). Как для (β), так и для (β') мы укажем алгоритмический метод, позволяющий для каждой формулы, не содержащей кванторов существования, узнавать, выводима ли эта формула в системе (β) (соотв. (β')) или нет. Но изложение этого метода начнем для системы (β'). В основе полученного результата лежит понятие „класса регулярности“, которое было определено в ([2]). Мы определим некоторый класс регулярности, который обозначим буквой K.

Как указывалось в ([2]), для определения класса регулярности достаточно определить подкласс его примитивных формул. Но для описания примитивных формул класса необходимы некоторые предварительные определения.

Поставим в соответствие каждому рекурсивному терму некоторую совокупность термов, которую мы будем называть строчкой. Это соответствие должно удовлетворять следующим условиям.

1. Каждый терм содержится в соответствующей ему строчке.

2. Если $\psi^*(x)$ терм, принадлежащий строчке, соответствующей терму $\psi(x)$, а φ^* — терм, принадлежащий строчке, соответствующей терму φ, то $\psi^*(\varphi^*)$ принадлежит строчке, соответствующей терму $\psi(\varphi)$.

3. a) Строчка терма $\theta_h(x_1, \ldots, x_n)$, входящего в равенство (1), содержит терм h.

b) Строчка терма $\psi(x_1, \ldots, x_n)$, входящего в равенство (2), содержит терм x_i.

c) Строчка терма $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0)$, входящего в равенство (3). содержит терм $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$.

d) Строчка терма $f(x_1, \ldots, x_n')$, входящего в равенство (4), содержит терм $\mathrm{X}(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n))$.

4. Если терм содержится в какой-либо строчке, то все термы его собственной строчки также в ней содержатся.

5. Строчки, соответствующие термам, минимальны, т. е. удаление каких-либо термов из строчек приводит к нарушению предшествующих условий.

Приведенные условия однозначно определяют требуемое соответствие. Каждая строчка при этом состоит из конечного числа термов. Можно показать, что в каждой строчке, отвечающей какому-либо терму, существует единственный терм, собственная строчка которого состоит из него самого. Такой терм мы назовем «представителем» терма, которому соответствует данная строчка. Построение строчки для заданного терма и отыскание в нем представителя осуществляется финитным рекурсивным алгоритмом. Определим примитивные формулы класса K. Рассмотрим элементарную логическую сумму (т. е. выражение вида $\mathfrak{A}_1 \vee \ldots \mathfrak{A}_n$, где каждая формула $\mathfrak{A}_i$ представляет собой либо элементарную формулу, либо отрицание таковой). Заменим все входящие в нее термы их представителями. После этого в полученной формуле будем интерпретировать цифры $0, 0', \ldots,$ предикаты $x = y$ и $x < y$ и функцию x' обыкновенным арифметическим образом. Остальные функции мы будем интерпретировать произвольными функциями, определенными на натуральном ряду и принимающими значения из натурального ряда. Переменные суждения и переменные предикаты заменим произвольными индивидуальными. В том случае, когда рассматриваемая элементарная сумма будет представлять собой истинное арифметическое высказывание, мы будем называть ее примитивной формулой класса K. Заданием примитивных формул класс K однозначно определен. Из высказанных определений сразу не видно, что существует финитный алгоритм, позволяющий устанавливать, является ли данная произвольная элементарная сумма примитивной формулой класса K или нет. Однако легко убедиться, что на самом деле такой алгоритм из сказанного можно извлечь.

Основная теорема, из которой вытекают полученные результаты, состоит в следующем.

Теорема. *Класс K совпадает с классом формул, выводимых из аксиом арифметики* (β').

Если формула не содержит кванторов существования, то она дедуктивно эквивалентна формуле, у которой все кванторы удалены. Для того чтобы установить принадлежность такой формулы к классу K, достаточно привести ее по правилам алгебро-логики к конъюнктивной нормальной форме и выяснить, будет ли каждый множитель этой формы примитивной формулой класса K или нет.

Из приведенной теоремы следует, что, если это имеет место, то формула выводима из аксиом (β'), в противоположном случае — невыводима.

Действительно, принадлежность рассматриваемой формулы к классу K или, что то же, выводимость из аксиом (β'), равнозначна тому, что разложение этой формулы при помощи дистрибутивной операции на множители должно привести к произведению, каждый множитель которого является примитивной формулой класса K. Так как отыскание представителей для термов осуществляется посредством финитного алгоритма, то мы имеем алгоритм для решения вопроса о выводимости произвольной формулы в системе аксиом.

Тот же результат можно получить и для системы аксиом (β), только для этого требуется в определение примитивной формулы класса K внести следующее изменение: рекурсивную функцию, определяемую равенствами

$$\delta(0)=0, \qquad \delta(x')=x,$$

надо интерпретировать не произвольной функцией на натуральном ряду, как это делалось для системы аксиом (β'), а придать ей естественный арифметический смысл: $\delta(x)=0$ при $x=0$, $\delta(x)=x-1$ для $x\neq 0$.

Можно несколько расширить полученный результат, рассмотрев формулы, выводимые не только из аксиом (β) (соотв. (β')), но и с помощью ограниченного употребления аксиомы полной индукции по следующей схеме.

Формулу $\mathfrak{A}(x)$ будем считать выводимой, если формулы $\mathfrak{A}(0)$ и $\mathfrak{A}(t)\rightarrow\rightarrow\mathfrak{A}(t')$ выводимы из аксиом (β) (соотв. (β')). Однако легко видеть, что для формул, содержащих квантор существования, даже для класса формул с одним квантором существования и без кванторов всеобщности алгоритма, проверяющего выводимость или невыводимость этой формулы из аксиом (β) (соотв. (β')), уже существовать не может.

Поступило
29 X 1948

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] D. Hilbert u. P. Bernays, Grundlagen der Mathematik, 1934, 1, стр. 263.
[2] П. С. Новиков, ДАН, 64, № 3 (1949).